III. LAS AXIOMÁTICAS FORMALIZADAS

§ 16. *Simbolización.* El fin que uno se propone cuando se coloca bajo forma axiomática una teoría deductiva, es desprenderla de las significaciones concretas e intuitivas sobre las que en primer lugar fue construida, a fin de hacer aparecer claramente el esquema lógico abstracto. Ahora bien, según esta consideración, las primeras axiomáticas sufren aun muchas imperfecciones, como se ve respecto de la de Hilbert. Se nos pide mucho olvidar el sentido concreto de los términos propios de la teoría, considerar los puntos, las rectas y los planos simplemente como "cosas" que satisfacen a los axiomas; pero como estos términos son conservados, se favorece así, en lugar de contrariarla, nuestra inclinación espontánea hacia una cierta interpretación concreta determinada. Aun se la hace casi invencible cuando no teme uno entregarse al uso de ilustrar el texto con figuras geométricas. Se nos expone entonces a cometer una de las faltas de las que se quería precisamente preservarnos: mantener, en torno a significaciones expresamente determinadas por los postulados, una zona más o menos borrosa de significaciones previas implícitas, a las que arriesgamos referirnos, sin advertirlo, en la sucesión de las demostraciones. Y, en todo caso, es detenido uno en camino en la tentativa de desprender de todo contenido intuitivo la armadura lógica de la teoría.

Así, bien pronto se hace sentir la necesidad de substituir las palabras que designaban las nociones primeras de la teoría, aun con el peso de su significación intuitiva, por símbolos desprovistos de sentido previo, y susceptibles en consecuencia de recibir exacta y exclusivamente el que les confieren los axiomas. En lugar de escribir que un punto está situado sobre una recta, se designará, por ejemplo, la relación de incidencia por la letra F, los puntos por las primeras letras mayúsculas, las rectas por las minúsculas, y se anotará simplemente: F (*A*, *a*). Se ve ya con este ejemplo que la simbolización no se detiene en las solas nociones propias de la teoría —en nuestro ejemplo en las solas nociones geométricas—, sino que utiliza también el simbolismo de la lógica de las relaciones. Teóricamente, eso no era sin duda indispensable, ya que las teorías anteriores a una teoría dada, aquí la aritmética y la lógica, intervienen ahí a título operatorio, por tanto, con su verdad material y su sentido usual. Sin embargo, parecería muy paradójico, en el momento mismo en que se crea un simbolismo para una teoría que no lo posee aún, descuidar utilizar al mismo tiempo el de teorías que poseen ya uno, como es el caso, desde hace mucho tiempo, de la aritmética y, desde hace poco, el de la lógica. Se sabe en efecto que, desde la mitad del siglo XIX, la lógica se ha renovado completamente y ensanchado, bajo el impulso de matemáticos que la han iniciado, según el ejemplo de su ciencia, en la vía del simbolismo. Mientras que Boole y sus discípulos se asignaban como fin construir un cálculo lógico sobre el modelo del cálculo algebraico, la escuela italiana, con Peano, se aplicaba a construir un algoritmo lógico especialmente adaptado a las necesidades de la expresión matemática. Naturalmente, cuando esta segunda corriente viene a encontrar la que apunta a la axiomatización de las matemáticas, resulta de ahí una axiomática totalmente presentada bajo la forma simbólica, y así sin duda, es como desde fines del siglo XIX, Peano había expuesto su aritmética.

Una segunda razón, de otro modo imperiosa, iba a precipitar esta simbolización total, a saber, la exigencia de formalización. Aunque simbolización y formalización sean dos pasos distintos y teóricamente separables, se encuentran, de hecho, estrechamente asociadas: pues la segunda es considerablemente facilitada por la primera, de suerte que la llama casi irresistiblemente.

§ 17. *Formalización.* Apenas se cree haber satisfecho a las últimas exigencias de la lógica, cuando una exigencia nueva, más sutil, surge y requiere un esfuerzo suplementario. De la geometría empírica a la geometría racional, de la presentación euclidiana a la presentación axiomática, de las axiomáticas vulgares a las axiomáticas simbolizadas, a cada paso se cree haber expulsado por fin la intuición en provecho de la lógica. ¿Hemos llegado ahora al término, y nuestra última etapa es verdaderamente la última? ¿Hemos conseguido descartar todo factor intuitivo y subjetivo en la apreciación de la validez de una teoría deductiva?

La teoría nos presenta proposiciones primeras que enuncian, en lenguaje simbólico, relaciones lógicas entre términos primeros: puesto que no las propone sino a título de hipótesis, las admitimos como tales, bajo reserva de su compatibilidad. Pero, a partir de ahí, no recibiremos un término nuevo si no es definido con la ayuda de los términos primeros, no aceptaremos una proposición nueva si no es demostrada con la ayuda de las proposiciones primeras. Ninguna incertidumbre, por tanto, ninguna impugnación posible sobre la adopción de un término nuevo o de una proposición nueva — con una condición sin embargo: que las reglas de la definición y de la demostración sean ellas mismas admitidas en común sin la menor ambigüedad, que la deontología del trabajo deductivo, es decir, la lógica, sea a la vez perfectamente precisa y perfectamente universal, regulando todos los detalles e imponiéndose a todos los espíritus. Si no, si en este dominio pueden surgir desacuerdos, si ocurre que se discute sobre el valor lógico de tal procedimiento de demostración o de definición, entonces la misma axiomática, edificio lógico irreprochable para uno, podrá ser juzgada por otro lógicamente defectuosa.

Ahora bien, esto es sin duda lo que ocurre, y bajo una forma particularmente aguda en el momento mismo en que se comenzaba a axiomatizar. La "crisis" de los fundamentos (§ 27), que se manifestó con ocasión de la teoría cantoriana de los conjuntos, dividió profundamente a los matemáticos. No por una de esas querellas sobre una cuestión particular, como las conoce toda ciencia en desarrollo, y que se apaciguan luego por un acuerdo al que un sabio competente no puede rehusarse sin mala conciencia, sino por una divergencia aparentemente fundamental sobre cuestiones de principio, y que parece atestiguar diferencias irreductibles en las estructuras de los espíritus. Tal definición, que uno encuentra perfectamente clara, es juzgada por otro desprovista de sentido; tal demostración, constringente para éste, carece de fuerza para aquél; tal principio de lógica, que según algunos se impone absolutamente a todo pensamiento, según otros no vale sino para un dominio bastante restringido.

¿Cómo acogerse a ello, en semejante caso, para limitar al menos, el desacuerdo precisándolo, y volver a encontrar un terreno de armonía? Hay un solo medio: hacer ahora para las reglas de lógica *según las cuales* se razona, lo que se había hecho procedentemente para los postulados *sobre los cuales* se razona: enunciarlos expresamente, y en totalidad. Después, adoptar respecto de ellos la misma actitud aislada que se había tomado ante los postulados: establecerlos hipotéticamente, no afirmarlos categóricamente. Así como se admiten uno al lado de otro, al nivel de las axiomáticas abstractas, diversos sistemas de postulados incompatibles entre ellos (euclidiano, lobatchevskiano, etcétera), sin preguntarse cuál es verdadero y aceptándolos como igualmente válidos, asimismo se podrá acoger, al nivel de las axiomáticas formalizadas, diversos sistemas de reglas lógicas y, en consecuencia, diversas maneras de desarrollar una misma axiomática. Como dice Carnap: en lógica, no hay moral; no se trata de decretar prescripciones o prohibiciones, sino de llegar a convenciones; cada uno es libre de construir a su modo su lógica, a condición de que la enuncie claramente y que la siga luego rigurosamente (principio de tolerancia de la sintaxis). La corrección lógica en el desarrollo de una teoría axiomatizada deja entonces de tener un sentido absoluto, pero llegando a ser relativa a tal o cual conjunto de principios regulativos, se presta a una apreciación objetiva. Ante una axiomática, podemos encontrarnos en la situación de dos compañeros que no se pusieran de acuerdo sobre las reglas de un juego; si no toman la precaución de enunciarlas cada uno, eso les impide jugar juntos una partida: pero si se las comunican y si convienen, por ejemplo, en alternar los dos reglamentos, pueden entonces jugar partidas sucesivas sin tener que acusarse mutuamente de trampa. El dominio de validez se establece, en cierta manera, en un nivel más elevado. Así como, cuando se pasaba de la teoría concreta a la teoría axiomatizada, la verdad de una proposición del sistema resultaba hipotética, suspendida de la libre posición de tal sistema de postulados, así ahora la validez formal de la axiomática retrocede un grado y llega a ser a su vez hipotética, siendo función de la elección que se hizo de las normas lógicas.

La presentación lógica de las teorías deductivas tomó así, hacia 1920, un nuevo giro, al empeñarse en la vía de la formalización. Para sustraer la validez del sistema a toda apreciación subjetiva, se impone en adelante enunciar, de una manera precisa y detallada que no deje más lugar a una casuística, las reglas de definición y demostración que presiden su construcción. Aquellos mismos que no creen en la omnipotencia de la lógica y que defienden los derechos de la intuición, debieron, también ellos, ceder al movimiento para poder justificarse a los ojos de sus adversarios, y se ha visto así, cosa no poco paradójica, enunciar las "reglas formales de la lógica intuicionista" y constituirse un "formalismo intuicionista".

§ 18. *Del razonamiento al cálculo.* Se concibe que sería prácticamente imposible satisfacer exigencias tan estrictas si uno continuara expresándose en el lenguaje usual, con su imprecisión y sus innumerables irregularidades. Por esto, de hecho, la formalización supone a la simbolización. Una axiomática formalizada se presenta, así pues, como un conjunto de signos, los unos propios de la teoría, los otros anteriores, provistos de un enunciado de las reglas que se aplicarán en el manejo de estos signos. A menudo estas reglas se reparten en dos grupos: reglas de estructura, que conciernen a la formación de las expresiones (y entre las que se pueden colocar las reglas para las definiciones), y reglas de deducción, que conciernen a sus transformaciones (utilizadas para las demostraciones). Las primeras deben permitir reconocer siempre, sin disputa posible, si una expresión (proposicional o no) está bien formada y pertenece así al sistema, las segundas, si una deducción está bien llevada y si, en consecuencia, su conclusión es un teorema del sistema. Tales reglas, desde luego, dejan completamente a un lado las interpretaciones eventuales de términos o de fórmulas, incluso los de la lógica. Consideran solamente la estructura formal de las expresiones, la sucesión de los pequeños dibujos que se leen de izquierda a derecha, línea tras línea, sobre la hoja. Son propiamente prescripciones para un cálculo. Son comparables, si se quiere, a las reglas del juego de ajedrez, que nos enseñan cómo se debe inicialmente disponer las piezas, después cuáles son los diversos desplazamientos permitidos para cada pieza. Una demostración no hará más llamado a nuestro sentimiento espontáneo de la evidencia de ciertos encadenamientos lógicos: se ocupará de transformar, por grados sucesivos y sin saltar una etapa, una o varias fórmulas anteriormente escritas como axiomas o teoremas, mencionando, para cada una de estas transformaciones elementales, el número de la regla que la autoriza, hasta que en fin se llegue, línea tras línea, a la fórmula buscada. Por un cambio brusco de actitud que se podría comparar al que afecta a la conciencia ante una figura ambigua, el pensamiento, en lugar de atravesar los símbolos para apuntar, por su intermediario, a las cosas simbolizadas, se detiene ahora en los símbolos mismos, remitiendo para más tarde su interpretación eventual y retirándoles, por el momento, su función de símbolos, a fin de tomarlos como objetos últimos.

Las exigencias de rigor habían hecho descartar como sospechosa la intuición sensible, particularmente la representación de figuras en el espacio, para no fiarse sino de la evidencia de los encadenamientos lógicos. Ahora, las incertidumbres de la intuición intelectual conducen a repudiarla a su vez y a reemplazar el razonamiento pensado o, incluso hablado, por un cálculo sobre signos, expuestos sobre una hoja ante la mirada. Solamente volviendo así a la intuición visual, no recaemos en el nivel primero. Se ha hecho, en primer lugar, un progreso en el sentido de lo abstracto y de lo general, por la posibilidad de una interpretación ulterior de los símbolos, o mejor, de una multitud de interpretaciones diversas. Pero se ha hecho también un progreso considerable respecto a la seguridad y objetividad. Si los signos son en número restringido, si su figura no se presta a confusión, si por último se instituye expresamente una legislación coherente y sin escapatorias para su manejo, entonces ninguna impugnación seria es concebible ya, como tampoco en un juego bien determinado: tal agrupamiento de signos es o no prohibido, tal transformación de una fórmula es o no prohibida. Como escribe Cavaillès: "Un razonamiento escrito no puede equivocar, pues en su diseño aparecerían figuras excluidas." [25] Aquí los errores "saltan a los ojos" como una falta de cálculo en una operación aritmética, un movimiento incorrecto en el juego de ajedrez, un barbarismo o un solecismo en una lengua cuya gramática está bien determinada. Así, el cálculo formal, como lo anhelaba ya Leibniz, reemplaza ventajosamente al razonamiento.

§ 19. *La metamatemática.* Con este cambio de punto de vista que hace pasar, al menos provisionalmente, los caracteres del rango de medio al de fin, aparecen nuevas posibilidades especulativas. El pensamiento se encuentra ahora en presencia de otro sistema de objetos, sometidos a combinarse y disociarse según leyes bien determinadas, y que padecen así transformaciones que no son, sin recordar al matemático, las que éste tiene el hábito de estudiar sobre figuras o, mejor aún, en los problemas de combinatoria. Los signos, con las leyes que regulan su empleo "definen una suerte de espacio abstracto con tantas dimensiones como grados hay de libertad en la operación concreta e imprevisible de la combinación". [26] Así surge la idea de una ciencia nueva que tendría por objeto, no ya los seres matemáticos de los que hablaban las fórmulas, sino las fórmulas mismas, abstracción hecha de su sentido: construidas con ocasión de los seres matemáticos, se separan de éstos por completo, para aparecer ellas también como seres de una naturaleza original, dignas de un estudio apropiado. La *metamatemática* será, en relación a la expresión matemática, lo que la matemática usual es en relación a sus objetos. Hilbert es aún quien, a partir de 1917, dio el impulso a este nuevo orden de investigaciones, que comenzaron a desarrollarse en Gotinga bajo su dirección, de suerte que su nombre

[25] J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, p. 94.

[26] *Ibidem*, p. 93.

se encuentra íntimamente asociado tanto a la segunda fase de la axiomática como a la primera.

No es un juego gratuito. La metamatemática se encontraba, en cierta forma, en el punto de encuentro de varias líneas de investigaciones. En primer lugar, en la confluencia de dos corrientes que conocemos ya: una que había tenido su origen en la reflexión sobre el aparato lógico de la geometría y que, al aplicarse para perfeccionarlo, había desembocado en la axiomática; otra que, tendía a reformar la lógica inspirándose en los métodos del álgebra y había logrado constituirla como un cálculo. Por una influencia recíproca, la axiomática se transformaba, pues, en un cálculo, mientras que la lógica, por su lado, se axiomatizaba. Por otra parte, el giro que habían tomado las discusiones sobre el problema capital del fundamento de las matemáticas (§ 27) sugería recurrir al formalismo, pero abordando los problemas bajo un sesgo que fuera aceptable por los adversarios mismos de los métodos puramente formales. Zermelo había intentado ya resolver las dificultades poniendo por obra lo que se podría llamar, retrospectivamente, la axiomática ingenua. El resultado más visible había sido reafirmar en su actitud a los matemáticos empiristas o intuicionistas, cuya doctrina, con Brouwer y su escuela, se desarrollaba y se afianzaba. Ahora bien, la consideración de los signos escritos sobre una hoja es ya, en un sentido, un retorno a la evidencia intuitiva. Si se pudiera estudiar, según métodos científicos estrictos, las demostraciones impugnadas, haciendo abstracción de las entidades y de las operaciones matemáticas a las cuales remiten —de las que algunas están desprovistas de sentido a los ojos del intuicionista, especialmente cuando hacen intervenir la idea de un infinito actual—, para no considerar sino sus combinaciones concretas sobre el plano del simbolismo, se transformaría completamente el aspecto del problema, y en forma que diera satisfacción a los dos partidos opuestos. Cambiando de objeto, transportando el estudio del dominio de los seres matemáticos al de los signos que los representaban, considerando, en lugar de nociones que algunos juzgan confusas o vacías, símbolos ofrecidos a la mirada, se instala uno, sin renunciar a ninguna exigencia de rigor formal, sobre un terreno que el intuicionista reconocerá como suyo. Problemas que concernían al infinito actual se convierten ahora en problemas que conciernen a un número finito de operaciones de cálculo, efectuadas o efectuables, descansando en un número finito de signos dados en la intuición. Mientras que, por otra parte, el lógico más altivo no puede acoger sino con favor el propósito de constituir una "teoría de la demostración" que sea ella misma demostrativa.

Por lo demás, lejos de que la metamatemática inventara arbitrariamente nuevos problemas, ella es la que, al contrario, era requerida por ciertos problemas que Hilbert había encontrado desde las primeras investigaciones y, con él todos los axiomáticos, en especial el establecimiento de la compatibilidad e independencia de los axiomas de un sistema. Estos problemas, y los que los acompañan (integridad, decidibilidad, saturación, etcétera) no son propiamente problemas matemáticos, ya que descansan no sobre los objetos matemáticos mismos, sino sobre las proposiciones que hablan de estos objetos. Como son esenciales a toda investigación axiomática, no podía dejar de hacerse sentir la necesidad de elevarlos a ellos mismos al nivel de la ciencia y tratarlos de manera rigurosa y metódica. Tal es precisamente el designio de la metamatemática. Consideremos, por ejemplo, el problema de la no-contradicción, el cual, con el de la decidibilidad, ha ocupado el mayor lugar en estas especulaciones. Recordemos cómo se lo resolvía en las primeras axiomáticas: realización en una teoría concreta cuya verdad fuera atestiguada por la experiencia —prueba que no deja de ser empírica y que no es siempre posible administrar; reducción a una teoría abstracta cuya no-contradicción era postulada— lo que no hacía sino aplazar la dificultad. Pero que se transponga la cuestión, y que en lugar de interrogarse sobre la contradicción o la compatibilidad de las ideas, se interrogue uno sobre la posibilidad o imposibilidad de construir, a partir de las fórmulas simbólicas que enuncian los axiomas de una teoría y sujetándose a un sistema bien definido de reglas, expresiones de tal o cual forma — por ejemplo, hacer surgir un par de expresiones proposicionales que difieran solamente en esto, que una reproduzca a la otra haciéndola preceder del signo de la negación. Si se puede demostrar esta posibilidad o esta imposibilidad, se habrá demostrado, por eso mismo, incluso la contradicción o la no-contradicción de la teoría.

§ 20. *Límite a las demostraciones de no-contradicción.* Es necesaria, sin embargo, una condición: cualesquiera que sean la complejidad y la inseguridad de la teoría matemática estudiada y de las fórmulas simbólicas en donde se expresa, la demostración metamatemática que descansa sobre esta teoría deberá ella misma, bajo pena de círculo vicioso o de petición de principio, no hacer sino de encadenamientos deductivos muy simples y no discutidos, a manera de lograr irresistiblemente la adhesión de un espíritu atento. Así como la consideración de signos remite a la representación visual, así la demostración sobre estos signos llama a la evidencia intelectual (aunque no fuera sino para comprender el sentido de las reglas, juzgar si son correctamente aplicadas, etcétera). Pero, así sea racional o sensible, semejante retorno a la intuición no es legítimo más que cuando no se va más allá del límite de las intuiciones elementales y nadie sospecha.

Por más reducido que sea entonces el margen a la apreciación subjetiva para juzgar de la validez de una teoría, un formalismo intransigente no se considerará aún plenamente satisfecho. ¿No podría uno arreglárselas para que los procedimientos de la demostración metamatemática se encuentren de alguna manera integrados en la teoría misma de la cual demuestra la no-contradicción, de manera que la seguridad así demostrada de la teoría recaiga sobre estos procedimientos? Se esperó llegar ahí gracias al ingenioso procedimiento llamado la "aritmetización de la sintaxis", debido a Gödel, y que permite formular la sintaxis lógica de la aritmética en el interior mismo de la aritmética. Consiste en establecer una correspondencia entre los símbolos, por cuyo medio se expresa la sintaxis de la aritmética, y ciertos símbolos propios de la aritmética misma, de manera que toda expresión de la lengua sintáctica se pueda traducir unívocamente en una expresión aritmética. Si, además, se ha llegado a establecer esta correspondencia de tal manera que toda proposición que traduzca de este modo una proposición sintáctica en lenguaje aritmético, sea ella misma demostrable en la aritmética, entonces se habrá expresado la sintaxis de la aritmética en el interior de la aritmética.

¿Se puede, ahora, demostrar en esta lengua sintáctica la no contradicción de la aritmética? Uno de los primeros resultados a los que fue conducido Gödel por la aplicación de su procedimiento, fue justamente probar la imposibilidad de una demostración tal. En efecto, estableció, en dos teoremas famosos de metamatemática (1931), primeramente, que una aritmética no-contradictoria no podía constituir un sistema completo, y comporta necesariamente enunciados indecidibles; en segundo lugar, que la afirmación de la no-contradicción del sistema figura precisamente entre estos enunciados indecidibles.

Este resultado aparentemente negativo, obtenido por métodos formales estrictos, y corroborados luego por resultados análogos sobre problemas conexos, tiene un gran alcance. Es más que un simple episodio en la historia de la metamatemática. Ésta reanudaba, bajo una forma nueva, el viejo ideal de una demostración absoluta, al proponerse constituir un formalismo que fuera susceptible de acabarse volviéndose a cerrar, de alguna manera, sobre él mismo. Actualmente se ha puesto un término a esta esperanza. Aún en la ciencia formal por excelencia, la matemática axiomatizada, es necesario resignarse a la separación, que se pensaba haber borrado, entre verdad y demostrabilidad. La primera noción desborda a la segunda. Porque, como una de las más elementales teorías matemáticas comporta ya, no solamente proposiciones al presente indecididas, sino proposiciones esencialmente indecidibles); y como por otra parte, el principio de tercero excluido, enunciado contradictorio no-*p* son igualmente indemostrables); y como por otra parté, el principio de tercero excluído, cuya validez mantienen precisamente los formalistas contra sus adversarios intuicionistas, asegura que de dos proposiciones contradictorias una es necesariamente verdadera, incluso si no podemos saber cuál: es necesario concluir ciertamente que hay, en el interior de una matemática axiomatizada, algo verdadero no demostrable. Ya para una lengua formal tan restringida como es la aritmética, su no-contradicción no podrá ser demostrada sino por una apelación a medios que le sean extraños.

§ 21. *La axiomatización de la lógica.* Problemas y dificultades análogos a los que conocía la metamatemática se encontraban al mismo tiempo, en el terreno de la lógica, estando los dos órdenes de investigaciones por lo demás, al presente íntimamente asociados. Cuando la axiomática estaba aún en sus comienzos, la condición de la lógica podía aparecer, en razón de su situación inicial, como privilegiada. Una teoría axiomatizada retiraba a los términos y a los postulados sobre los que se edificaba su significación y su verdad usuales, pero hacía un llamado, para esta edificación, a teorías anteriores, cuya verdad y sentido estaban presupuestos. Y en el punto de partida de estas teorías previas, anteriores a todas las otras, se encontraba la lógica. De ésta se podía sin duda afirmar que ella misma se axiomatizaba, puesto que se presentaba en adelante, desde Frege y particularmente en la grande síntesis de Russell y Whitehead, como un sistema deductivo en donde estaban expresamente despejados términos primeros y proposiciones primeras. Sólo que aún no había ahí, si se puede decir, sino una axiomática concreta: los términos conservan ahí más o menos su acepción usual, simplemente precisada por las relaciones que enunciaban los postulados, y éstos eran verdaderos axiomas, a la vez proposiciones primeras y evidencias intelectuales. El sistema tenía un sentido pleno y una verdad absoluta, que se propagaban, mediante las definiciones y las demostraciones, a los términos derivados y a los teoremas. Proponiéndose fundar la aritmética y, por su intermedio el edificio entero de las matemáticas, sobre la lógica, el "logicismo" de Frege y de Russell tendía, pues, a una cosa muy distinta que proseguir simplemente el movimiento de retroceso hacia los principios: pensaba llevarlo a su término, alcanzar la roca, el fundamento último. Los términos primeros de la axiomática peaniana permanecían relativamente indeterminados, comportando una pluralidad de interpretaciones; las proposiciones primeras sufrían de la misma indeterminación y, siendo funciones proposicionales más bien que proposiciones, no constituían, ni podían constituir el objeto de una afirmación categórica. Definiendo estos términos, esencialmente variables hasta ahí, con la ayuda de constantes lógicas, concebidas como otras tantas esencias intemporales; demostrando estos postulados, hasta ahí extraños a lo verdadero y a lo falso, con la ayuda de los principios lógicos, concebidos como otros tantos axiomas que se imponen absolutamente al pensamiento, Russell pretendía dotar a los principios de las matemáticas y, por lo tanto, a todas las deducciones subsiguientes, de un sentido absoluto y de una verdad absoluta. La matemática dejaba de ser esta ciencia "en donde no se sabe jamás de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero", volvía a ser categórico-deductiva a la manera de la lógica, de la que sacaba toda su substancia.

Pero el crepúsculo de las evidencias no iba a tardar en alcanzar a su vez, a la lógica. Ya el surgimiento, con ocasión de la teoría de los conjuntos, de antinomias de las que se advertía que el origen debía ser buscado en su nivel, después el desacuerdo profundo que se había manifestado, en su discusión, sobre la validez de tal o cual de sus principios, habían comenzado a conmover la idea de una legislación lógica absoluta, única y universal. La orientación nueva que algunos lógicos hacia 1920, comienzan a dar a sus trabajos, iba ahora a desagregar la lógica desde el interior. Pasa con ella lo que, algunos decenios antes, había pasado con la geometría. Así como ésta había dejado de ser única, por la aparición de las geometrías no-euclidianas, después de ser intuitiva, por la puesta en forma axiomática, asimismo la lógica se pluraliza y se axiomatiza. Era inevitable que la lógica, convertida en deductiva, se transformara también en el sentido de una axiomática abstracta. Las razones que invitaban a dejar de lado, en el desenvolvimiento de un sistema, el sentido intuitivo de los términos, por miedo a que pasara inadvertido en los razonamientos ulteriores, valían para la lógica tanto como para toda otra disciplina deductiva: en los términos de la teoría era necesario no ver nada más que el soporte de las relaciones enunciadas en los postulados. Las proposiciones de la lógica, vaciadas así de su sentido propiamente lógico —como las de la geometría lo estaban de su sentido propiamente geométrico— se convierten, pues, en formas puras: simples tautologías, como lo entenderá Wittgenstein, es decir, enunciados que no dicen estrictamente nada sobre lo real, pero que, por esta razón, permanecen válidos cualquiera que sea el contenido concreto que se vierta en ellos. Y esta interpretación formal de la lógica favorece la aparición de lógicas no- clásicas, así como por una acción recurrente, éstas vienen a reforzarla. Porque si los principios no son establecidos sino hipotéticamente, nada prohíbe ya establecer otros, modificar éste, suprimir aquél: se pasa de la lógica a las lógicas, que uno construirá a voluntad. Y a su vez, esta pluralidad de lógicas retira su privilegio a la lógica clásica, que no es más que un sistema entre otros y, como ellos, simple arquitectura formal cuya validez no depende sino de su coherencia interna.

Sólo que, la analogía con el caso de la geometría cesa en este punto esencial, porque la lógica no dispone ya, de ciencias anteriores de las que se pueda hacer uso para construirla como axiomática formal. Ya, a medida que se remontaba la escala de las ciencias, crecía la dificultad de no presuponer nada, en el trabajo de axiomatización, que perteneciera a la ciencia en cuestión; por ejemplo, en el nivel de la aritmética, la pluralidad numérica. Con la lógica, la dificultad llega a ser una imposibilidad absoluta: hace falta necesariamente una lógica para regular las operaciones del axiomático. Se puede seguramente velar por ajustar la lógica que se axiomatiza sobre aquella misma de la que se sirve para axiomatizarla, por obrar de manera que, dicho de otro modo, la lógica operatoria venga a aplicarse sobre la lógica axiomatizada como uno de sus modelos posibles. Sin embargo subsisten cuestiones embarazosas. En primer lugar, ¿se está seguro de poder procurar una correspondencia completa entre las dos? Ya los primeros artífices de la lógica simbólica no habían dejado de observar que, ciertas reglas de la deducción formal no podrían ser ellas mismas incluidas en el formalismo: por ejemplo, la licencia de reemplazar, en una fórmula del cálculo, las variables por constantes individuales, licencia sin la cual la fórmula quedaría sin uso, sería ella misma necesariamente presupuesta en el uso de toda fórmula simbólica que pretendiera expresarla. De suerte que sería necesario distinguir claramente entre los axiomas y las reglas, entre los enunciados que componen el cálculo, y los enunciados que regulan el cálculo dominando estos últimos, de alguna manera, al cálculo mismo y permaneciéndole exteriores. Semejante distinción va naturalmente a imponerse en toda tentativa para axiomatizar la lógica. Lo cual significa que es imposible llevar hasta un término final la obra de axiomatización, la reducción de lo intuitivo por su resorción en la lógica: siempre subsiste algo anterior, un intuitivo previo. Pues si las proposiciones *del* cálculo lógico pueden, e incluso deben, ser vistas como puramente formales, al contrario las proposiciones *sobre* el cálculo no pueden, ellas, ser vaciadas de su significación y deben necesariamente ser entendidas en su sentido intuitivo. Por otra parte, la multiplicación de las lógicas no simplifica las cosas. Con una lógica considerada como única y absoluta, la correspondencia entre su forma axiomatizada y su uso operatorio, aunque siguiera siendo parcial, se establecía al menos como de ella misma. No puede ya suceder así con lógicas construidas *ad libitum*: su multiplicidad y su diversidad les prohíben referirse por igual a nuestra lógica operatoria, de la que se tendría trabajo admitir que fuese parecidamente maleable.

§ 22. *La metalógica.* De este modo la axiomatización de la lógica constriñe a ésta al desdoblamiento. No sólo a ese desdoblamiento propio de toda axiomática, que permite hacer de ella una lectura abstracta o una lectura concreta, sino además, al que exige la anterioridad de la actividad constructiva por referencia a toda construcción formal. Toda axiomática formal se encuentra en efecto bordeada, de cada lado, por un dominio intuitivo: debajo, por las interpretaciones concretas que se pueda dar de ella, los modelos, de los que uno le ha servido generalmente de lecho; arriba, por las ciencias que le son anteriores, y que intervienen, en su edificación, con su verdad categórica y su significación intuitiva. Ahora bien, la situación de la lógica en un extremo de la escala de las ciencias no le permite apoyarse en una ciencia previamente constituida. Si se quiere, sin embargo, expresar el saber implícitamente utilizado en el trabajo de axiomatización de la lógica, no se podrá hacerlo en el interior de la lógica, sino en una disciplina nueva que tendría por objeto las fórmulas de la lógica axiomatizada y las reglas de su manejo. La metalógica juega así, en relación con la lógica, el mismo papel que la metamatemática en relación con la matemática. Sería exagerado, sin duda, decir que nació de la axiomatización de la lógica: en un sentido todos los lógicos habían hecho ya, en algún grado, metalógica, pero lo hacían sin saberlo. La axiomatización obligó a tomar conciencia de ella, y a distinguirla expresamente de la lógica a la que está vinculada como a su objeto. Al cálculo formal, lengua objetiva, viene así a superponerse una metalengua, que comprende particularmente las reglas de sintaxis del cálculo formal, y las reglas semánticas para su interpretación concreta.

Naturalmente, nada impide ahora tomar a su vez la metalengua como objeto de estudio, formular su sintaxis, después organizar ésta en una teoría deductiva, que se podrá axiomatizar, simbolizar, formalizar. Sólo que, se usará, por ello mismo, una nueva metalengua o, si se prefiere, se creará un objeto para una nueva metalógica. Y se puede así, al menos en teoría, continuar indefinidamente estos escalonamientos, señalando la palabra "indefinidamente" la imposibilidad de trazar un límite a la regresión formalizadora y eliminar, en el punto de partida de la elaboración axiomática, todo rastro de intuición.