II. LAS PRIMERAS AXIOMÁTICAS

§ 7. *Nacimiento de la axiomática.* Mientras la geometría pretendía mediante sus proposiciones enseñar verdades, la forma racional dada a la presentación de la ciencia podía aparecer como una especie de lujo intelectual. Siendo entonces considerado el encadenamiento lógico como un medio para alcanzar proposiciones verdaderas, o para hacerlas aceptar de los demás según una especie de argumentación retórica *ex praecognitis et praeconcessis*, eran tolerables algunos defectos de rigor, desde el momento en que la intuición venía, como medio auxiliar, a suplirlo: el resultado era alcanzado, la seguridad de la ciencia no era comprometida. No sucede ya lo mismo cuando, como invita ahora la pluralidad de las geometrías, uno se desinteresa de la verdad material del contenido, para hacer reposar la validez de una geometría sobre la armadura lógica. Entonces, la menor insuficiencia hace desplomarse el edificio: recurrir a la intuición, es violar la regla del juego.

Otra razón impelía en el mismo sentido aun a aquellos que continuaban ligando la primera importancia a la verdad extrínseca de las proposiciones: la desconfianza acrecentada que suscitaba la intuición espacial. La historia entera de la geometría atestigua una tendencia constante a restringir cada vez más su dominio y a acrecentar otro tanto las exigencias lógicas. Pero en el siglo XIX, con la "aritmetización del análisis", el movimiento tomó una aceleración considerable, a la que el surgimiento de geometrías rebeldes a la intuición no podía sino contribuir. Separaciones sorprendentes se manifestaron así entre las sugestiones falaces de la intuición y las enseñanzas indubitables de la demostración. Tal proposición, de la que todos se creían seguros, revélase errónea; tal otra, que habríamos descartado sin titubear es, sin embargo, susceptible de prueba. Para no citar sino dos ejemplos memorables: no es verdad que a una curva continua se pueda trazar siempre una tangente (Weierstrass), no es falso que una curva, línea sin anchura, pueda cubrir toda la superficie de un cuadrado (Peano).

Es Pasch quien, en 1882, intentó la primera axiomatización de la geometría. Si su solución presenta muchas imperfecciones, debidas en parte al hecho de que el autor conserva la actitud del empirismo clásico, al menos planteó claramente el problema: "Para que la geometría llegue a ser verdaderamente una ciencia deductiva, es necesario que la manera como se sacan las consecuencias sea en todas partes independiente del *sentido* de los conceptos geométricos, como debe serlo de las figuras; sólo deben tomarse en consideración las *relaciones* establecidas por las proposiciones (que hacen oficio de definiciones) entre los conceptos geométricos. Durante la deducción puede ser conveniente y útil pensar en la significación de los conceptos geométricos utilizados, pero esto no es en manera alguna *necesario*; de suerte que precisamente se hace necesario cuando se manifiesta una laguna en la deducción y (cuando no se puede suprimir esta laguna modificando el razonamiento) en la insuficiencia de las proposiciones invocadas como medios de prueba." [11]

He aquí, pues, las condiciones fundamentales a las que, para ser verdaderamente rigurosa, debe satisfacer una exposición deductiva:

1. Que sean enunciados explícitamente los términos primeros, con ayuda de los cuales se propone uno definir todos los otros;
2. que sean enunciadas explícitamente las proposiciones primeras, con ayuda de las cuales se propone uno demostrar todas las otras;
3. que las relaciones enunciadas entre los términos primeros sean puras relaciones lógicas, y permanezcan independientes del sentido concreto que se pueda dar a los términos;

[11] M. PASCH, *Vorlesungen über neure Geometrie,* 1882, p. 98.

4. que sólo estas relaciones intervengan en las demostraciones, independientemente del sentido de los términos (lo que prohíbe, en particular, tomar prestado algo a la consideración de las figuras).

§ 8. *Anterioridad de un sistema.* Las reglas establecidas así por Pasch comportan una distinción clara entre los términos o proposiciones *propias* al sistema axiomatizado y los que le son lógicamente *anteriores*. Si se trata, por ejemplo, de geometría, los términos propiamente geométricos que figuran en las proposiciones primeras no pueden evidentemente formar proposiciones más que si están unidos entre ellos por otras palabras, que tengan una función lógica, tales como: *el*, y, *todo, no, es un . . . , si . . . entonces*, etcétera. Igualmente, las demostraciones no hacen llamado sólo a las proposiciones del sistema, porque, para integrar éstas en demostraciones, es necesario utilizar reglas lógicas de encadenamiento, por ejemplo, aplicar la regla de la transitividad de la implicación (si *a* implica a *b* y si *b* implica a *c*, entonces *a* implica a *c*). Un conocimiento —si no teórico, al menos operatorio— de la lógica, pues, se presupone aquí. En relación a la ciencia así axiomatizada, la lógica se llama *anterior.*

Además de la lógica, un sistema geométrico presupone ordinariamente la aritmética. Para definir un triángulo, es necesario emplear el número *tres*; para demostrar que la suma de sus ángulos vale dos rectos, es necesario admitir la validez de los teoremas aritméticos acerca de la adición. De una manera general, se llamará anteriores a un sistema axiomático todos los conocimientos a los que ese sistema hace, así, llamado. Se notará que, si una axiomática se presenta como un sistema puramente formal, los conocimientos de que tiene necesidad para constituirse son, ellos mismos, nociones entendidas en la plenitud de su sentido y tesis tomadas en su verdad material.

Este recurso a conocimientos anteriores, sobre todo si no está expresamente declarado, repugna al espíritu de la axiomática, que se impone como ley explicitarlo todo, sin presuponer nada. Se puede naturalmente atenuar esto obligándose a enumerar, al principio de una axiomática, las ciencias que se presupone. Pero esta simple formalidad no basta de ningún modo para resolver los difíciles problemas que surgen aquí, y cuya consideración será determinante para los desarrollos ulteriores de la axiomática. Particularmente: ¿se podrá, como sugiere en seguida el afán de pureza lógica, hacer remontar la axiomatización de la ciencia hasta un punto último, de la geometría a la aritmética, de la aritmética a la lógica, a modo de absorber los conocimientos hasta ahí utilizados como anteriores —y que por consiguiente permanecen exteriores— a la axiomática, y a eliminar así toda presuposición intuitiva? O bien, los conocimientos elementales de lógica y aun de aritmética, ¿no serían necesariamente utilizados, a título operatorio, en la construcción de las axiomáticas lógicas y aritméticas? Es difícil, señalaba Poincaré "enunciar una frase sin poner en ella un nombre de número, o al menos la palabra varios, o al menos una palabra en plural". [12] El aritmético o el lógico *numera* sus proposiciones y sus teoremas, *cuenta* el número de sus nociones primeras. Lo que es verdad de las nociones aritméticas vale, con mayor razón, para las nociones lógicas.

No es siempre fácil, por otra parte reconocer exactamente la frontera entre las nociones propias a una ciencia y las que le son anteriores. Leemos, por ejemplo, [13] en un libro de geometría: "La recta *a pasa por* el punto A." El término *pasa por* aparentemente es del vocabulario geométrico; pero ya que se puede evitarlo diciendo: "El punto A *pertenece* a la recta *a*" y que la pertenencia de un individuo a una clase (considerándose la línea como una clase de puntos) es una noción lógica, el término *pasa por* debe aquí ser contado entre los términos lógicos. Leemos, más lejos, las dos frases siguientes: "Si un punto está dado *fuera* de un plano, etcétera" y: "Si un punto está dado fuera de una superficie esférica, etcétera." ¿En dónde clasificar la expresión *fuera de*? En el primer caso, se enuncia simplemente que el punto *no pertenece* al plano: es, pues, un término lógico. Pero en el segundo, se quiere decir algo más: no solamente que no pertenece a la superfi-

[12] H. Poincaré, *Science et méthode*, p. 166.

[13] Los ejemplos que siguen están tomados de Padoa, *La logique déductive. Rev. de Métaph. et de Morde*, nov. 1911, pp. 830-31.

cie de la esfera, sino, además, que no está situado en *el interior* de ésta: el mismo término debe, por tanto, ser mirado aquí como propiamente geométrico.

Se podía creer que la enumeración separada de los términos primeros de un sistema era superflua, ya que estos términos son exactamente los que se encuentran en las proposiciones primeras. De hecho, en las primeras axiomáticas, no se tomaba siempre esta precaución.[14] La dificultad que hay algunas veces en reconocer, en las proposiciones, cuáles son los términos propios de la teoría, impone, se comprende, dar la lista exacta de ellos.

§ 9. *Indefinibles e indemostrables. Sistemas equivalentes.* Uno de los rasgos que caracterizan más visiblemente la puesta en forma axiomática de una teoría deductiva, es, se ha visto, que se comienza por despejar y enunciar ahí expresa y exhaustivamente los indefinibles y los indemostrables de la teoría. Semejante fórmula reclama, sin embargo, si no correcciones, al menos comentarios interpretativos.

En primer lugar, no es lógicamente indispensable que la totalidad de los términos fundamentales y de los postulados sea presentada en bloque desde el principio de la teoría, y agotada antes que comiencen las definiciones y las demostraciones. Puesto que la teoría axiomatizada alcanza un cierto grado de complejidad, tal procedimiento arriesgaría entorpecer la exposición, sin ninguna ventaja lógica. En este caso, a menudo se juzgará preferible proceder por grados sucesivos, y no introducir sino a medida de las necesidades, sea aisladamente, sea por grupos, las nuevas nociones fundamentales, con los postulados que les corresponden: a condición, bien entendido, de que la cosa sea hecha siempre de modo explícito. Resta el que la mención de los términos no definidos y de las pro-

[14] Sin duda había también, en esta diferencia de tratamiento entre los términos y las proposiciones, un efecto de ese curioso retardo en la teoría de los términos, del que hemos ya encontrado una manifestación en el hábito secular de contar las definiciones entre los principios. Padoa observa a este propósito que, si se dispone desde hace mucho tiempo de la palabra técnica *postulado*, para designar las proposiciones no-demostradas, no se ha inventado una palabra para los términos no-definidos: pues esta última expresión era tan poco empleada que no se había considerado necesario abreviarla. La palabra *teorema*, a la que falta una correspondiente para designar los términos definidos, se prestaría a una observación análoga.

posiciones no demostradas, debe preceder siempre a la de los términos y proposiciones que derivan de ellos por definición o demostración, y en este sentido relativo es como merecen ser llamados primeros.

Así como las palabras *primero* y *comienzo*, las de *indefinible* e *indemostrable* no deben tampoco ser entendidas sino en un sentido relativo y por eso se tiende cada vez más, para no exponerse a una equivocación, a evitarlas. Un término no es indefinible, una proposición no es indemostrable, sino en el interior de un sistema estructurado de una cierta manera, y pueden constituir siempre el objeto de una definición o de una demostración si se modifica convenientemente las bases del sistema. Consideremos siempre el ejemplo de la geometría euclidiana. No es de ningún modo imposible demostrar en ella el postulado de las paralelas: en lugar de demostrar por su medio que la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos, o que a toda figura se puede hacer corresponder una figura semejante de magnitud cualquiera, o que por todo punto interior a un ángulo se puede trazar una recta que corta sus dos lados, basta invertir el orden, y se demostrará la unicidad de la paralela tomando como postulado una u otra de estas últimas proposiciones. Igualmente, la elección de los términos de la teoría que se instituirán como fundamentales es libre. Simplemente, un cambio en la lista de los términos primeros determina un cambio correspondiente en los postulados, ya que éstos enuncian relaciones entre esos términos. [15]

Es necesario, pues, vigilar, cuando se habla de un sistema deductivo, que no se confundan dos acepciones de la palabra *sistema*: el conjunto de las nociones y proposiciones que lo componen, primitivas y derivadas, y tal o cual organización lógica que es posible darle. Un sistema, entendido en el primer sentido, se presta siempre a una multitud de presentacio-

[15] La escuela italiana puso en perfecta luz, por analogía con lo que se había ya reconocido respecto de las proposiciones, el carácter relativo, para una noción, de ser primera. Se notará sin embargo que si, lógicamente, la relación de anterioridad de una proposición o de un término en relación con otro es arbitraria, eso no significa que todos los órdenes sean válidos. La idea de un orden natural de nociones y aserciones, que era la de Pascal y Leibniz, no ha perdido todo valor, si apunta a un orden *racional*, distinguido de un orden solamente *lógico*.

nes axiomáticas; es, para usar una comparación de Nicod, semejante a un poliedro, susceptible de descansar sobre varias bases diferentes. Estos diferentes sistemas, en el segundo sentido de la palabra, se llaman entonces *equivalentes.* Así, todas las reconstrucciones axiomáticas de la geometría euclidiana son equivalentes, puesto que contienen, en el fondo, el mismo conjunto de términos y proposiciones: lo que difiere es solamente la repartición de éstos en primitivos y derivados. Más generalmente, y también más precisamente: dos sistemas de proposiciones son equivalentes si cualquier proposición del uno se puede demostrar con la sola ayuda de las proposiciones del otro, y recíprocamente; dos sistemas de términos son equivalentes, si todo término del uno se puede definir con la sola ayuda de los términos del otro, y recíprocamente.

§ 10. *Las definiciones por postulados.* El estatuto lógico de los postulados es claro: no son afirmados a título de verdades generatrices de otras verdades, sino simplemente puestos a título de hipótesis, tales que permiten deducir un conjunto dado de proposiciones, o de las cuales uno se propone investigar qué consecuencias implican. Y se sabe que no es en manera alguna necesario que las proposiciones sean verdaderas y conocidas como tales, para que se pueda razonar correctamente sobre ellas, siendo la validez de un razonamiento independiente de la verdad de su contenido. La condición de los términos primeros parece más embarazosa. Porque, si se puede hacer abstracción de la verdad de las proposiciones sobre las que se opera, ¿se puede asimismo hacer totalmente abstracción del sentido de los términos? ¿Cómo decir de éstos algo, así fuese a título hipotético, si están para nosotros totalmente despojados de sentido? Y ¿cómo llegar a un sentido, si por una parte no podemos definirlos, y si por otra parte rehusamos tener en cuenta su sentido intuitivo previo? Porque, si no se impone uno olvidar su sentido empírico, preaxiomático, se corre gran riesgo de referirse luego a él, sin saberlo, en el razonamiento, e introducir de este modo ahí de una manera subrepticia elementos implícitos más o menos vagos y sin duda variables con cada uno. No hay más que una respuesta: su sentido será fijado por el uso que se haga de ellos en los postulados, los cuales enuncian qué relaciones lógicas sostienen entre sí esas nociones. Este modo de determinar el valor de un término no es propiamente una definición, no establece una equivalencia lógica entre el término nuevo y una expresión conocida. Pero como cumple la función de una definición, que es la de fijar la significación, se puede considerarla como una definición implícita.

Esta noción fue introducida por Gergonne. "Si una frase, observa él, contiene una sola palabra cuya significación nos es desconocida, el enunciado de esta frase podrá bastar para revelarnos su valor. Si, por ejemplo, se dice a alguien que conoce las palabras *triángulo* y *cuadrilátero*, pero no ha oído jamás pronunciar la palabra *diagonal*, que cada una de las dos diagonales de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos, concebirá en el acto lo que es una diagonal y la concebirá tanto mejor cuanto es aquí la única línea que puede dividir el cuadrilátero en triángulo. Estas especies de frases que dan así la inteligencia de una de las palabras de que se componen, por medio de la significación conocida de las otras, podrían ser llamadas *definiciones implícitas*, por oposición a las definiciones ordinarias, que se llamarían *definiciones explícitas*." [16] Tal procedimiento no tiene nada de excepcional. Así es como el niño aprende el sentido de la mayor parte de las palabras de su lengua. En las ciencias físicas, es usual que una ley, establecida con la ayuda de nociones provisionales, permita en cambio precisar su sentido. Sobre este hecho se fundaba el nominalismo científico para sostener que las leyes no son a menudo sino definiciones disfrazadas: la ley de la caída de los cuerpos define la caída *libre*, la ley de las proporciones definidas caracteriza la *combinación* por oposición a la mezcla, etcétera. Tales definiciones indirectas son comparables a ecuaciones con una incógnita, cuyo valor es fijado por el conjunto de la ecuación.

Esta determinación es unívoca cuando, como en el ejemplo dado por Gergonne, un solo valor satisface a la ecuación. No ocurre siempre así. Sobre todo si consideramos un sistema de ecuaciones con varias incógnitas sucederá que varios siste-

[16] GERGONNE, *Essais sur la théorie des définitions*, 1818, pp. 22-23, citado por F. ENRIQUES, *L'évolution de la logique*, trad. fr., p. 94.

mas de raíces satisfagan a las ecuaciones, o incluso, una infinidad, como si se estableciera, por ejemplo:

$$y = 2x$$
$$z = y + x.$$

En un sentido, tal sistema queda sin embargo, determinado, ya que si se asigna a una de las incógnitas un valor arbitrario, los de las otras dos se encuentran en seguida fijados. En lugar de ser individual, la determinación es en algún modo global, y toma un carácter más abstracto: en nuestro ejemplo, y será siempre el doble de x y z su triple. Más bien que los términos mismos, son, se ve, las *relaciones* entre los términos las que están aquí exactamente determinadas. La caracterización de los términos primeros por las relaciones que enuncian entre ellos los postulados, nos coloca en una situación análoga. Un sistema de postulados es comparable a un sistema de ecuaciones con varias incógnitas, correspondiendo estas incógnitas a los términos primeros de la axiomática considerada: su valor no es cualquiera, pero no está determinado sino *implícita, solidaria, equívocamente*. Esta manera de determinar el sentido de los términos es un caso de definición implícita, que se nombra *definición por postulados*. Se comprende cómo Poincaré podía decir, a propósito de los postulados de la geometría euclidiana, que son definiciones disfrazadas: el *conjunto* de los postulados euclidianos constituye, en efecto, una definición implícita del *conjunto* de las nociones euclidianas.[17]

[17] La equivocidad de las definiciones por postulados —de la cual se verá más tarde que es, para los sistemas axiomáticos, lo contrario de un defecto— explica los casos de *dualidad* que se habían reconocido anteriormente en diversas teorías científicas. Así GERGONNE había expuesto sistemáticamente (1826) los comienzos de la geometría proyectiva (sin paralelismo) escribiendo en dos columnas, siendo cambiados los términos *punto* y *plano* cuando se pasaba de derecha a izquierda, sin que la verdad de las proposiciones se altere, por ejemplo: *dos puntos determinan una recta, dos planos determinan una recta; tres puntos no en línea recta determinan un plano, tres planos que no tienen una recta común determinan un punto*, etcétera. Semejante dualidad depende de que los términos primeros de la teoría, que son los de *punto* y de *recta* (serie de puntos) continúen satisfaciendo a los postulados en donde figuran si se les da respectivamente el sentido de *plano* y de *haz de planos* (pasando por una recta): por eso todo teorema válido para los puntos y las rectas (que los unen) vale igualmente para los planos y las rectas (que son su intersección), y recíprocamente.

Se ve mejor ahora que los postulados de una teoría no son proposiciones, susceptibles de verdad o falsedad, ya que contienen *variables* relativamente indeterminadas. Solamente cuando se dé a estas variables ciertos valores o, en otros términos, cuando se los substituya por constantes, entonces los postulados llegarán a ser proposiciones, verdaderas o falsas según la elección que se haya hecho de estas constantes. Pero entonces se sale de la axiomática para pasar a sus aplicaciones. Con igual título que las ecuaciones de un mismo sistema, al que no se podría compararlos mejor, los postulados son simples *funciones proposicionales*: expresión de la cual no es necesario dar una definición explícita, puesto que se encuentra, en suma, implícitamente definida por las frases que preceden.

"La matemática es una ciencia en donde no se sabe jamás de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero": esta ocurrencia bien conocida que sugería a Russell la consideración de la matemática axiomatizada, vale para toda axiomática en general. Asimismo, a la axiomática realmente es a la que conviene esta otra ocurrencia que es de Poincaré: "La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes."

§ 11. *Dos ejemplos de axiomáticas.* Aunque no concierna a la geometría y que su autor se haya preocupado sobre todo del problema de la expresión simbólica, daremos como primer ejemplo de axiomática la que Peano construyó para la teoría de los números naturales: en primer lugar, porque su brevedad permitirá exponerla toda entera, luego porque se encuentra en ella una ilustración simple y notable del carácter de equivocidad. Pues no comporta sino tres términos primeros: cero, el número, el sucesor de — y cinco proposiciones primeras, que transcribimos de la notación simbólica en el lenguaje usual:

1. cero es un número;
2. el sucesor de un número es un número;
3. varios números cualesquiera no pueden tener el mismo sucesor;

4. cero no es el sucesor de ningún número;
5. si una propiedad pertenece a cero y si, cuando pertenece a un número cualquiera, pertenece también a su sucesor, entonces pertenece a todos los números (principio de inducción).

Se ve cómo, con la ayuda de las dos primeras proposiciones, se puede definir en primer lugar el número *uno*, después el número *dos*, y así sucesivamente. Sobre estas bases, las nociones y proposiciones elementales de la aritmética se pueden definir o demostrar todas.

Sólo que, la interpretación usual de los términos primeros no es la única que satisface a este juego de axiomas, de suerte que no determina de manera unívoca un sistema concreto de proposiciones. Por ejemplo, observa Russell, si le conservamos a *sucesor* su significación habitual, pero entendemos por *cero* un número cualquiera, pongamos 100, y por *número* cada uno de los números a partir de 100, los 5 axiomas quedan verificados, y naturalmente, todos los teoremas que se deducen de ellos. Igualmente si, conservándole ahora a *cero* su sentido ordinario, se designara como *número* los solos números pares, y por *sucesor* el segundo sucesor; o aún, si, representando *cero* el número 1 y significando *sucesor* mitad, el *número* designara cada uno de los términos de la serie 1, 1/2, 1/4, etcétera. Todas estas interpretaciones y las semejantes que será fácil imaginar, suponen una estructura formal común, que esta axiomática pone en evidencia. Lo que ella caracteriza, no es, pues, propia y limitativamente la aritmética, es, más generalmente, una cierta estructura, que es la de las *progresiones*. La serie de los números naturales no es sino una ilustración entre otras. Éstas no permanecen, por lo demás, encerradas, como podrían sugerirlo los ejemplos que preceden, en sub-dominios interiores a la aritmética: puede instituirse una progresión también entre entidades diversas de los números, tales como puntos o instantes.

Como segundo ejemplo, bosquejaremos la axiomática que Hilbert dio de la geometría euclidiana.[18] El interés de Hil-

[18] *Grundlagen der Geometrie*, 1899. En las ediciones ulteriores el autor aportó algunas pequeñas modificaciones; nosotros hemos tenido entre las

bert se concentró sobre las proposiciones. No se preocupó mucho por reducir al mínimo el número de los términos primeros, que por lo demás dejó incorporados a los axiomas, sin enunciarlos separadamente de modo sistemático.[19] Pero dos trazos, en él, merecen retener la atención.

En primer lugar, no se contentó con despejar los axiomas, de los cuales algunos habían permanecido hasta entonces implícitos, y enumerarlos: los repartió, según las nociones fundamentales que utilizan, en 5 grupos, y se esforzó, para cada uno de estos grupos o para sus combinaciones, en precisar y delimitar el dominio de los teoremas que determinan. Los del primer grupo establecen un enlace entre los conceptos de punto, de recta y de plano: son los axiomas característicos de la geometría proyectiva (8 axiomas, por ejemplo: dos puntos determinan una recta; sobre una recta hay siempre al menos dos puntos, y sobre un plano al menos tres puntos no en línea recta). Los del segundo grupo, los axiomas del *orden*, fijan el sentido de la palabra *entre*: son los axiomas topológicos (4 axiomas, por ejemplo: si *A*, *B*, *C*, son puntos de una recta y si *B* está entre A y C, está también entre C y A). El tercer grupo contiene los 6 axiomas de la *congruencia* o igualdad geométrica (por ejemplo: si *A* y *B* son dos puntos de una recta *a* y *A'* un punto de una recta cualquiera *a'*, existe sobre *a'* y de un lado cualquiera de *A'* uno y un solo punto *B'* tal que el segmento *A'B'* sea congruente con el segmento *AB*). El cuarto grupo no comporta sino un solo axioma, el de las *paralelas*. En fin, un último grupo se refiere a la *continuidad* y cuenta con dos axiomas, a los que pertenece el

manos la 3ª edición, 1909. Aquellos a quienes la obra de Hilbert no fuera accesible encontrarán sus 21 axiomas reproducidos especialmente en el excelente librito de Godeaux, *Les géométries* (coll. A. Colin). Recordemos de una vez por todas que el término axioma ha dejado hoy de evocar la idea de evidencia y de regla, para no retener sino la de principio establecido hipotéticamente, es decir, de postulado. La substitución del primer término por este último se ha hecho con la palabra axiomática poco menos que inevitable.

19 Desde 1882 Pasch había logrado definir todos los términos a partir de cuatro términos primitivos (*punto, segmento, plano, es superponible a*). Partiendo de ahí, Peano había luego reducido (1889-1894) y Padoa (1900) los reducirán a dos (respectivamente: *punto y movimiento, punto y distancia*). La reducción es mucho menos desarrollada en Hilbert. Poco después (1904), Veblen presentará de la misma geometría, una axiomática reducida.

llamado de Arquímedes, el cual viene a enunciar que, añadiendo sucesivamente un segmento a sí mismo sobre una recta a partir de un punto *A*, se podrá siempre superar un punto *B* cualquiera de esta recta.

Además, Hilbert inauguró un género de investigaciones cuya importancia iba a revelarse como capital en toda elaboración axiomática, al interrogarse sistemáticamente sobre la no-contradicción de su sistema de axiomas y sobre la independencia mutua de sus elementos. Para establecer la no-contradicción, construye una interpretación aritmética del sistema, de suerte que toda contradicción que surgiera en las consecuencias de sus axiomas debería repercutir en ella: la coherencia de la aritmética, que se supone admitida, garantiza pues la de su sistema de axiomas. Por otra parte, la independencia de un axioma se establece por la posibilidad de construir un sistema coherente que lo deja a un lado: las primeras geometrías no-euclidianas atestiguaban ya la independencia del axioma de las paralelas; igualmente, construyendo una geometría no-arquimediana, Hilbert prueba la independencia de los axiomas de la continuidad.

§ 12. *Modelos. Isomorfismo.* Se puede llamar *concreta, material* o *intuitiva* a [20] una teoría en el estadio preaxiomático, es decir, que mantiene aún el contacto con los conocimientos que organiza, y que presenta un contenido que conserva su sentido y su verdad empíricos. Es el caso de la geometría ordinaria, tal como se enseña tradicionalmente en las escuelas. Estando dada una teoría deductiva concreta, es siempre posible, se ha visto, reconstruirla sobre bases diferentes: así, los diversos autores de tratados elementales de geometría, a la vez que ofrecen desde hace siglos el mismo cuerpo de doctrina, han modificado cada uno más o menos el ordenamiento euclidiano. Aunque secundarias hasta donde el contenido de la teoría se ve como esencial, estas diferencias de forma adquieren una importancia acrecentada en la medida en que se descuida este contenido, y por eso se puede decir que su interés

[20] Estos términos no tienen aquí, claro está, sino un sentido relativo, que se opone al carácter más abstracto, más formal, y más lógico de la teoría axiomática correspondiente.

no se manifiesta plenamente sino con las axiomáticas, teorías abstractas y formales. En este sentido se opondrá, a una teoría concreta dada, la pluralidad de las axiomáticas que le corresponden. La axiomática de Hilbert, por ejemplo, no es más que una de todas aquellas a las que se presta la geometría euclidiana.

Consideremos ahora una sola de estas múltiples axiomáticas de una teoría concreta. Ya que el sentido de sus términos y, por consiguiente, de todas sus proposiciones, no está fijado por los postulados sino de manera equívoca, se podrá siempre, si se encuentran varios sistemas de valores que satisfagan igualmente al conjunto de relaciones enunciadas por los postulados, dar interpretaciones concretas diversas, o dicho de otro modo, elegir entre varias realizaciones. Estas realizaciones concretas de una axiomática son llamadas sus *modelos.*[21] Se entiende de por sí que la teoría concreta original, que proporcionó los puntos de referencia del esquema lógico trazado por la axiomática, será uno de estos modelos, pero no será el único. Una axiomática se presta, pues, como se comprobó con ocasión de la axiomática peaniana, a realizaciones diferentes, pudiendo éstas ser tomadas de dominios de pensamiento muy alejados del dominio inicial. Así, hay ahora una pluralidad de interpretaciones o modelos concretos que oponemos a una sola y misma axiomática.

Cuando los modelos no se distinguen así entre ellos, sino por la diversidad de las interpretaciones concretas que se da a sus términos, y coinciden exactamente cuando se hace abstracción de éstas para instalarse sobre el plano de la axiomática formal, se dice que son *isomorfos*: tienen en efecto igual estructura lógica. El método axiomático tiene precisamente el interés de revelar isomorfismos entre teorías concretas aparentemente heterogéneas, restableciéndolas en la unidad de un sistema abstracto. Entonces, cualquiera de estas teorías podrá, si ensanchamos un poco el uso de esta palabra, servir

21 Esta palabra no debe sugerir la idea de una anterioridad arquetípica. Se explica por la asimilación de estas diversas interpretaciones a la teoría concreta primitiva, que puede con mucha propiedad llamarse *modelo* de la axiomática que se ha construido según ella. Sin duda el recuerdo de los "modelos mecánicos" de los físicos ingleses ha intervenido también, con la introducción concreta de esta noción.

de modelo a las otras, lo mismo que a la teoría abstracta correspondiente.[22]

Hay, pues, tres niveles por distinguir, sobre los que puede hacerse la diversificación de una teoría deductiva. Volvamos siempre al ejemplo de la geometría euclidiana. En primer lugar, si se modifica diversamente uno al menos de sus postulados, se obtendrán, a su lado, otras teorías (geometrías lobatchevskiana, no-arquimediana, etcétera) que le serán, se puede decir, *vecinas* o *emparentadas*: en este sentido se habla de la pluralidad de geometrías. Tomemos ahora una cualquiera de estas geometrías: como hay varias maneras de hacer su reconstrucción lógica, se diversificará a su vez en varias axiomáticas, que serán *equivalentes* entre ellas. En fin, si escogemos una de estas axiomáticas, podremos generalmente encontrarle interpretaciones diferentes: de ahí una nueva diversificación, según modelos que serán *isomorfos*. A la diversidad de geometrías se superpone así la de axiomáticas de una misma geometría, y a ésta, la de modelos de una misma axiomática. Conviniendo igualmente la palabra teoría, sea a la presentación axiomática, sea a una de sus interpretaciones concretas, se ve que será necesario guardarse de confundir entre el caso de teorías emparentadas, el de teorías equivalentes, y el de teorías isomorfas.

§ 13. *Consistencia e integridad. Decidibilidad.* Aunque arbitraria en ciertas consideraciones, la elección de los postulados que se ponen por base de una axiomática no es por eso dejado al azar: queda sujeto a exigencias internas diversas, más o menos imperiosas.

La más apremiante es, sin duda, la de coherencia. Si los diversos postulados de un sistema no fueran compatibles entre ellos, el sistema llegaría a ser contradictorio. Seguramente

[22] Cuando todos sus modelos son así isomorfos entre ellos, el sistema axiomático se llama *monomorfo*. Existen también sistemas *polimorfos*. Se ve en seguida, particularmente, que los diversos modelos de un sistema no saturado (§ 15) no son todos isomorfos, ya que la no saturación significa precisamente la posibilidad de una o varias bifurcaciones. Pero se advertirá más tarde que algunos sistemas saturados pueden también, paradójicamente, comportar modelos no isomorfos (§ 26). En otros términos, la saturación es condición necesaria, pero no suficiente, de monomorfismo.

es permitido, por necesidades teóricas, quitar eventualmente esta obligación, o aun pretender expresamente construir un sistema contradictorio — así como ocurre que se propone uno razonar por el absurdo. Pero este caso no deja de ser excepcional, y ordinariamente se impone como condición absoluta a una axiomática ser no-contradictoria o, como se dice también, *consistente.*[23] Una propiedad de un sistema contradictorio, en efecto, es que permita deducir no importa qué: se puede demostrar en él una proposición cualquiera del sistema, pero también su negación. Semejante indeterminación retira al sistema todo interés.

Ahora, ¿cómo se sabe que un sistema de postulados es realmente consistente? La intuición no basta para asegurarnos de ello. Tener, por otra parte, efectivamente desarrollada una larga cadena de consecuencias sin encontrar jamás contradicción ahí, puede, sin duda, aportar una presunción y aun, en el caso de que la axiomática cubra enteramente una teoría concreta desarrollada en todos sentidos desde hace siglos, una certeza moral: nadie duda, por ejemplo, de la consistencia de la aritmética elemental o de la geometría euclidiana. Sin embargo, y sobre todo en el caso de que falte una prueba tal, semejante presunción no aporta una certeza absoluta; nada nos garantiza contra una sorpresa ni nos asegura que, llegados a un cierto punto, no nos tropezaremos con un absurdo. Es lo que sucedió, por ejemplo, con las antinomias de la teoría de los conjuntos (§ 27). Aunque nació de una exigencia acrecentada de rigor lógico, la práctica de la axiomática aumenta a su vez esta exigencia e incita a reemplazar esta especie de prueba empírica por una verdadera demostración. Tal demostración, es verdad, no será efectivamente practicable sino al nivel de las axiomáticas simbolizadas y formalizadas (capítulo III); ahí mismo, se verá, no tiene éxito sino dentro de límites bastante estrechos.

A falta de una demostración propiamente dicha, quedan dos procedimientos para establecer la no-contradicción de una teoría. En primer lugar, la *reducción* a una teoría anterior. Se postula la no-contradicción de un sistema prácticamente

[23] Un análisis más fino distingue entre no-contradicción y consistencia, diferencia diversas nociones de la consistencia, etcétera.

bien establecido, como es la aritmética clásica o la geometría euclidiana, después se construye, del sistema estudiado, una interpretación tal que venga a aplicarse sobre el primero, o sobre una parte de éste: la no-contradicción postulada del primero se trasmite así al segundo. Parecida prueba, evidentemente, no es sino condicional, pero si la teoría-testigo fue elegida con propiedad, es prácticamente suficiente. Una vez que Poincaré dio una interpretación euclidiana de la geometría lobatchevskiana, las dudas cesaron, de hecho, sobre la consistencia de esta última. La geometría euclidiana misma recibió, de parte de Hilbert, una interpretación aritmética, que se añade a la probabilidad ya considerable de su consistencia propia. Muy a menudo, la aritmética clásica es la que se elige como testigo.

Un segundo procedimiento consiste en dar, de la teoría en cuestión, una *realización* en el mundo de las cosas. En lugar de hacer volver la teoría a una teoría anterior cuya consistencia esté mejor asegurada, se desciende al contrario hacia lo concreto, se construye un modelo físico. Como todo lo que es real es *a fortiori* posible, la existencia de este modelo garantiza la consistencia de la axiomática que le corresponde. ¿No es, en el fondo, el éxito de las interpretaciones empíricas de la geometría clásica lo que nos hace admitir, antes de toda otra prueba, la coherencia de esta geometría y, por consiguiente, de la axiomática que obtiene de ella el esqueleto lógico?

De dos proposiciones contradictorias *p* y no-*p*, el principio de contradicción enseña que no pueden ser verdaderas simultáneamente: una al menos es falsa. A este principio se asocia desde hace mucho tiempo el de tercero excluido, el cual enuncia que tales proposiciones no pueden ser falsas simultáneamente: una al menos es verdadera. La conjunción de estos dos principios da lo que se puede llamar el principio de alternativa: de dos proposiciones semejantes una es verdadera, la otra falsa. A la consistencia de un sistema, fundada sobre el principio de contradicción, responde así su integridad, fundada sobre el principio de tercero excluido. Un sistema de postulados se llama *completo* cuando, de dos proposiciones contradictorias formuladas correctamente en los términos del sistema, una de las dos al menos puede siempre ser demostrada. Si tal sistema es además consistente, se ve entonces que de todo par formado en el interior del sistema, por una proposición cualquiera y su negación, se puede siempre demostrar una, y una sola. Dicho de otra manera, en presencia de una proposición cualquiera del sistema, se puede siempre demostrarla o refutarla, decidir en consecuencia de su verdad o falsedad en relación con el sistema de postulados. De tal sistema se dice que es *categórico*.

Abajo de esta forma fuerte de categoricidad, que no se alcanza sino en un pequeño número de sistemas, existe una forma de categoricidad más débil: aquella en donde se puede siempre, para una cualquiera de las expresiones del sistema, si no demostrarla (o refutarla), decidir al menos si es o no demostrable (o refutable). Tal sistema entonces es calificado de *decidible*. [24] Esta cualidad misma, no pertenece sino a un número bastante limitado de sistemas, relativamente simples.

La no-categoricidad y, con mayor razón, la no-decidibilidad son sin duda imperfecciones, pero no faltas lógicas, como es el caso de la no-consistencia; y por eso la exigencia de integridad es, de ordinario, vista como mucho menos apremiante que la de consistencia.

§ 14. *Independencia. Economía.* Se exige a menudo también que los diversos postulados de un mismo sistema sean *independientes* los unos de los otros, es decir, tales que una modificación aportada a uno de ellos no convierta el sistema en contradictorio. Para asegurarse de la independencia de un axioma, se le pone a prueba modificándolo sin tocar a los otros y sacando las consecuencias del nuevo sistema: si éste permanece consistente, se establece la independencia del postulado. Si sucede al contrario que surja una contradicción, y si además, como es el caso más usual, la modificación aportada al postulado consistió en reemplazarlo por su negación, entonces el resultado obtenido no es puramente negativo, porque la cadena de proposiciones que se ha establecido así da del postulado primitivo una demostración por el absurdo. Se ve el

[24] Diferenciaciones ulteriores han hecho aparecer que algunos sistemas pueden ser a la vez completos y sin embargo, indecidibles.

lazo que une una prueba de independencia y una demostración por el absurdo: el fracaso de la una revierte el éxito de la otra. Así, ensayando vanamente demostrar por el absurdo el postulado de las paralelas fue como se llegó, sin quererlo, a construir las primeras geometrías no-euclidianas y a probar así, por la consistencia de estas últimas, la independencia del postulado. Igualmente, pero esta vez de manera deliberada, procedió Hilbert, se ha visto, para establecer la independencia del postulado llamado de Arquímedes.

La independencia de los postulados de un mismo sistema no es lógicamente indispensable para su validez. Solamente, si esta condición no se sastisface, hay una superabundancia de proposiciones primeras, y se juzga ordinariamente preferible, en un designio de economía, reducir su número al mínimo. Decir que dos postulados no son independientes, es decir que el uno puede ser demostrado, sea directamente sea al menos por el absurdo, a partir del otro: en este caso, será conforme al espíritu del método deductivo producir esta demostración y hacer pasar la proposición entre los teoremas.

Estas consideraciones de economía, que tienen un carácter más estético, juegan no obstante un gran papel en la construcción de las axiomáticas. El ideal de éstas, como el de toda teoría deductiva en general, ¿no es en efecto reducir lo más posible el número de los términos primeros y de las proposiciones primeras? Muchos esfuerzos se han gastado en este sentido. Sin embargo, la simplicidad ganada en un punto debe pagarse a menudo con una complicación acrecentada sobre otros, y razones estéticas o didácticas dictarán entonces la elección. Es difícil disminuir simultáneamente el número de los términos primeros, el de los axiomas y la longitud de éstos: la pobreza de la lengua de base tiene por efecto generalmente alargar el discurso. Además, la más grande simplicidad intrínseca de un sistema podrá convertir en más incómoda su utilización concreta si, en el dominio considerado, ninguna entidad corresponde ya, de modo directo, a los términos primeros del sistema — a menos que inversamente, el uso de la axiomática no aclimate ahí poco a poco la noción. Aún independientemente de toda interpretación extrínseca, razones de comodidad de exposición pueden invitar a ciertos sacrificios del ideal de simplicidad máxima.

§ 15. *Sistemas debilitados o saturados.* En lugar de modificar, en un sistema de postulados compatibles e independientes, uno de ellos, se puede también ensayar retirarlo simplemente, sin tocar los otros. Se *debilita* así el sistema, puesto que se le quitan ciertas determinaciones; por eso ahí se lo ensancha abriendo la puerta a ciertas posibilidades que el postulado recien extraído tenía precisamente por efecto excluir. En otros términos, el sistema se encuentra así empobrecido en comprehensión y enriquecido en extensión. Si, por ejemplo, al mantener intactos los otros postulados euclidianos, se niega la unicidad de la paralela, se obtiene la geometría lobatchevskiana que, diferente de la de Euclides, tiene no obstante el mismo grado de particularidad. Pero si, al contrario, se deja completamente indeterminado el número de las paralelas posibles, es decir, si, en lugar de reemplazar el postulado acerca de las paralelas, se contenta uno con suprimirlo, cavando en cierta forma un vacío en el sistema, entonces se obtienen los principios de una geometría más general, de las que aparecen como especificaciones las de Euclides y Lobatchevski.

Se puede intentar la operación inversa: ensayando reforzar y limitar un sistema dado, añadiéndole uno o varios postulados, independientes de los primeros. No obstante, se tropieza uno ordinariamente muy pronto con un obstáculo: llega un momento en que la adición de todo postulado independiente, cualquiera que sea, hace al sistema contradictorio. El sistema es entonces *saturado*. Tal es, por ejemplo el caso, de la geometría euclidiana — a condición, claro está, de que no se cuenten en ella como postulados adicionales los que, sin estar en primer lugar expresamenté formulados, no estaban implícitamente menos admitidos en las demostraciones.