XXV BOSQUEJO DEL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA LÓGICA

"Todo lo que tiene importancia lo ha dicho ya alguien que no lo descubrió" — A N WHITEHEAD

§ 1 *El origen de la lógica en el análisis del pensamiento reflexivo*

EN NUESTROS días existe una considerable diversidad de opiniones acerca de la definición y el alcance propios de la lógica Tradicionalmente, se ha pensado que la lógica tiene que ver esencialmente con el pensamiento considerado desde el punto de vista regulador o normativo Ello no obstante, como hemos visto, la generalización de la lógica ha dado como resultado una ciencia de la forma pura que no debe distinguirse de las matemáticas Uno de los autores modernos más capacitados en la lógica matemática, declara "Realmente debería ser claro que quienes dicen que las matemáticas son lógica, no dan a la palabra 'lógica', en modo alguno, el mismo significado que quienes definen la lógica como el análisis y la crítica del pensamiento" [1] Esto es verdad La lógica en cuanto ciencia del orden, susceptible de expresión en un sistema simbólico, es ciertamente muy diferente de la lógica en cuanto análisis y crítica del pensamiento Asimismo son muy diferentes la agrimensura práctica y la geometría Pero, así como la geometría tuvo su origen en la agrimensura práctica y sólo mediante un largo proceso llegó a ser una ciencia puramente formal, del mismo modo la lógica tuvo su origen en el análisis y la crítica del pensamiento y sólo mediante un largo proceso llegó a ser la ciencia puramente formal del orden El desarrollo de una ciencia es un proceso histórico que depende de las maneras en que los hombres piensan El desarrollo de la geometría a partir de la reflexión sobre las operaciones implicadas en la agrimensura práctica, y el desarrollo de la lógica generalizada a partir de la reflexión sobre las operaciones implicadas en el pensamiento reflexivo, han sido en cada caso un desarrollo de generalización continua y abstracción consecuente, con el

[1] Véase F P RAMSEY, *Proc London Mathematical Association, Series* 2, vol 25, Pt 6, p 353*a*

resultado de que las dos líneas de desarrollo se han unido en la cien cia de la forma pura, que es la ciencia general del orden

La colección de doctrinas que se han reunido en diferentes épocas bajo el nombre singular de "lógica", no es, pues, una mera colección fortuita, aunque es indudable que la *selección* de algunas de estas doctrinas dentro de un solo libro que reclama para sí el título com prehensivo de "lógica" ha sido frecuentemente fortuita Estas diversas doctrinas pueden agruparse de la siguiente manera (1) examen psicológico de la naturaleza del proceso del pensamiento, (2) discusión lingüística acerca del uso de las palabras, incluida a veces información histórica relativa a su derivación etimológica, (3) consideraciones epistemológicas acerca de la naturaleza del conocimiento, (4) discusiones metafísicas acerca de tales problemas como la naturaleza de los universales y la relación del pensamiento con el sentido, (5) examen de la validez formal y de los principios del razonamiento, (6) examen de los "métodos" que emplean los científicos, (7) examen de argumentos retóricos con un análisis de ciertas falacias anti guas Debemos admitir que (3) y (4) no forman parte de la lógica, que (7) tiene la naturaleza de un apéndice, y que (1) y (2) tienen la naturaleza de prolegómenos Pero tanto (5) como (6) pertenecen propiamente a la lógica Su relación precisa se enuncia pocas veces con claridad, pero, puesto que el método científico es esencialmente lógico, y puesto que la validez del razonamiento depende de su forma, se desprende de ello que estos temas están íntimamente relacio nados

En este capítulo trataremos de indicar la manera como la lógica se ha desarrollado desde la ciencia del pensamiento reflexivo, o razona miento, hasta la ciencia de la forma

Para nuestro propósito no es necesario buscar los orígenes de la ciencia de la lógica antes de la época de los sofistas en Grecia La contribución de los sofistas consiste en su desarrollo del arte de la dis cusión argumentativa Es indudable que ellos trataron de instruir más bien que de demostrar, de modo que se contentaron con la persuasión en lugar de la convicción racional Su punto de partida lo constituyeron las opiniones habituales aceptadas sin crítica y sostenidas sin claridad Al razonamiento "a partir de opiniones que son gene ralmente aceptadas", Aristóteles dio el nombre de "dialéctica" [2] Así entendida, la dialéctica es un arte, no una ciencia relativa a los principios En este arte, como señalamos en el capítulo XXII, sobre salió Sócrates Pero éste no se contentó con aceptar la opinión habi tual, sino que se propuso alcanzar la claridad en lo tocante a las razones por las que había de aceptarse una conclusión dada De tal suerte, trató de saber *qué* es aquello concerniente a lo cual se extraen las conclusiones De esta manera, como hemos visto, Sócrates fue llevado a buscar las definiciones que se consideraba expresaban la esencia de lo que se definía "Era natural —dice Aristóteles— que

[2] *Topica*, libro I, 100*a*, 30

Sócrates buscara la esencia, pues él trataba de silogizar y la esencia es el punto de partida de los silogismos Pues dos cosas pueden atribuírsele legítimamente a Sócrates los argumentos inductivos y la definición universal, concernientes ambos al punto de partida de la ciencia"[3] Al atribuir el argumento inductivo a Sócrates, Aristóteles está pensando en el método socrático de seleccionar *casos* de algún universal, tal como la *justicia*, a fin de descubrir qué es exactamente lo que debe estar presente en cada caso del que pueda decirse correctamente que cae dentro de ese universal Hemos visto que el resultado de esta indagación puede formularse en una definición y puede aplicarse silogísticamente[4] Así, pues, la definición se concibe como dependiente de una colección de casos de aquello que ha de ser definido Pero Sócrates señala que un mero conjunto de casos no equivale a una definición No da respuesta a la pregunta de qué es la *naturaleza* de la cosa[5] Una vez que la definición ha sido formulada, puede someterse a prueba por medio de su aplicación a casos nuevos, sobre todo aplicándola a casos que parezcan inconsecuentes con la definición La reflexión sobre tales inconsecuencias puede conducir al descubrimiento de que un conjunto de casos debe distinguirse de otro conjunto aunque ambos puedan ser considerados como casos de algún universal más comprehensivo Fue de esta manera como Platón se vio llevado a desarrollar los procesos de clasificación y división Su investigación culminó en la concepción de un sistema ordenado de universales, o "Ideas", cuyas relaciones entre sí no dependen en ningún sentido de su aprehensión por parte del pensador No es necesario para nosotros indagar la construcción metafísica que Platón basó en esta concepción, ni el problema de la relación de la "Idea" con los casos que la ejemplifican Para nuestro propósito basta observar la insistencia de Platón en la noción de sistema Orden y sistema son lo mismo, no importa que estén ejemplificados en un sistema metafísico o en un sistema físico La metafísica de Platón constituyó un ejemplo de pensamiento reflexivo susceptible de análisis lógico Platón no reflexionó sobre la estructura lógica de su pensamiento

[3] *Metafísica*, 1078*b*, 23 30

[4] Véase p 484 del presente libro

[5] *Cf* el siguiente pasaje característico: "Sóc ¡Qué afortunado soy, Menón! Cuando te pido una virtud, me presentas un enjambre de ellas que están a tu cuidado Supongamos que llevo más adelante la imagen del enjambre y te pregunto cuál es la naturaleza de la abeja, y tú contestas que hay muchas clases de abejas, y yo replico: Pero, ¿difieren las abejas en cuanto abejas, porque hay muchas y diferentes clases de ellas; o no habrá que distinguirlas más bien por alguna otra cualidad, como por ejemplo la belleza, el tamaño o la forma? ¿Cómo me contestarías? *Men* Contestaría que las abejas no difieren las unas de las otras en cuanto abejas *Sóc* Y supongamos que yo fuera más adelante y dijera: eso es lo que quiero saber, Menón; dime cuál es esa cualidad en la que no difieren, sino que todas son iguales. ¿Podrías contestar? *Men* Podría" (*Menón*, 72 *b*)

§ 2 *El desarrollo de la lógica como ciencia de la forma*

Se acostumbra considerar a Aristóteles como el fundador de la lógica En la medida en que fue el primero en concebir que el pensamiento reflexivo era en sí mismo el asunto de una ciencia especial, puede admitirse que él fundó esa ciencia Ni Sócrates ni Platón reflexionaron sobre la *forma* de su razonamiento Aristóteles, por el contrario, como vimos en el capítulo x, estaba consciente de que las proposiciones tienen forma, y de que es su forma lo que tiene importancia en el razonamiento De consiguiente, se vio llevado a reflexionar sobre proposiciones dadas a fin de determinar su forma Desgraciadamente, sin embargo, Aristóteles, como vimos en el capítulo xx, tomó como modelo las discusiones argumentativas de Sócrates acerca de las definiciones correctas Así se vio llevado a concebir el silogismo como la única forma de razonamiento Es cierto que más adelante investigó la estructura del razonamiento matemático, esta investigación, sin embargo, no se emprendió sino cuando ya él había aceptado tan completamente su propia teoría del silogismo, que hizo encajar por la fuerza el razonamiento matemático dentro de la forma que él reconocía como propia de la inclusión socrática de lo particular bajo lo universal Es natural que Aristóteles haya sido influido indebidamente por consideraciones lingüísticas y que no haya logrado distinguir claramente entre el análisis gramatical y el análisis lógico Este defecto debe tomarse en cuenta, pero no es necesario subrayarlo aquí Sólo nos interesa precisar cómo se vio conducido Aristóteles al descubrimiento de la forma silogística Para este fin, primero debemos seguir la formulación del silogismo del propio Aristóteles y luego indagar cómo se vio llevado a seleccionar precisamente esa forma

La *definición del silogismo* de Aristóteles es mucho más general que su tratamiento del razonamiento silogístico En los *Tópicos* dice: "Ahora bien, el razonamiento es un argumento en el que, una vez establecidas ciertas cosas, algo diferente de éstas acaece necesariamente a través de ellas" [6] Esta definición repite, en efecto, la definición dada en *Analytica priora* [7] Así *definido*, el razonamiento silogístico equivale a la demostración, de suerte que el silogismo viene a ser simplemente *la forma de la implicación* Aristóteles, sin embargo, procede a limitar del todo arbitrariamente la *índole* de premisas que pueden ser usadas en un argumento demostrativo Así, dice: "Es necesario que toda demostración y todo silogismo pruebe que algo pertenece o no, y esto ya sea universalmente o en parte, y además ya sea ostensivamente o hipotéticamente" [8] Esto equivale a la afirmación de que todo silogismo debe ser de la forma sujeto-predicado Ya hemos visto

[6] 100*a*, 25
[7] Véase p 103 del presente libro
[8] *Anal priora*, 40*b*, 23

cómo interpretó Aristóteles esta afirmación [9] Por consiguiente, no es de sorprenderse que la formulación aristotélica del principio fundamental del silogismo haya sido la que ahora se conoce como el *dictum de omni et nullo* Dice Aristóteles: "Siempre que tres términos están relacionados entre sí de tal modo que el último está contenido en el medio como en un todo, y el medio está contenido en el primero como en un todo o bien excluido de él como de un todo, los extremos deben estar relacionados por un silogismo perfecto Llamo término medio a aquel que está contenido en otro y contiene a su vez a otro; también en lo tocante a su posición está en el medio Por extremos entiendo tanto aquel término que está contenido en otro cuanto aquel en que otro está contenido Si A es predicada acerca de toda B, y B acerca de toda C, A debe ser predicada acerca de toda C Similarmente también, si A no es predicada acerca de ninguna B, y B acerca de toda C, es necesario que ninguna C sea A" [10] Desde este punto de vista, Aristóteles se vio llevado a limitar las premisas y la conclusión de un silogismo a una o más de las cuatro formas AEIO [11]

Ahora tenemos que indagar por qué tuvo Aristóteles que restringir el silogismo a esta forma La respuesta hay que buscarla en el modo de razonamiento que Aristóteles seleccionó para el análisis Hemos visto que la respuesta a la pregunta sobre qué es lo que determina que una acción sea justa, o valerosa o sagrada, toma la forma de que tal acción es de tal o cual especie Esto es una afirmación de que tales o cuales características pertenecen a todas las acciones de cierto conjunto de acciones Se juzga que la acción dada pertenece a este conjunto porque tiene esas características Vemos, por lo tanto, cómo fue conducido Aristóteles a analizar el silogismo en tres y sólo tres términos conectados por la relación *es* Pese a su confianza en las formas lingüísticas, Aristóteles advirtió que el número de *palabras* no es pertinente al número de *términos* Por ejemplo, en "Todos los que son idóneos para gobernar son renuentes a gobernar; este hombre es idóneo para gobernar, por lo tanto es renuente a gobernar", la conclusión es demostrada acerca de la menor a través de la media Al intentar exhibir la *validez* de tal argumento, Aristóteles se vio llevado a reconocer que el conjunto de palabras que preceden al verbo deben ser *consideradas como un todo,* y asimismo el conjunto de palabras que siguen al verbo Esto no se debe a que el mismo conjunto de palabras aparezca dos veces (ya sea en ambas premisas o en una premisa y la conclusión), sino a que la conexión afirmada en la conclusión es establecida sólo porque los dos conjuntos de palabras han

[9] Véase p 104

[10] *Anal priora,* 25*b,* 32 26*a,* 1 Se observará que el primer ejemplo de Aristóteles es un silogismo en *Barbara,* y el segundo un silogismo en *Celarent*

[11] Así pues, la mayor, A, es predicada acerca de todas, o de ninguna, o de algunas, o de no todas de la menor, B Debe observarse que Aristóteles escribe el término *mayor* primero, puesto que expresa la proposición en la forma "A es predicada acerca de todas las B"

sido relacionados cada uno, *como un todo*, al conjunto de palabras que aparecen en cada premisa Se desprende de ello que cada conjunto de palabras debe ser simbolizado por *un solo* símbolo, puesto que lo que se simboliza es considerado como una unidad De tal suerte, el argumento es simbolizado por: Todo B es C, Este A es B, por lo tanto, Este A es C Así, pues, A, B y C son considerados, cada uno, como un solo término acerca del todo o de la parte respecto de la cual se predica algo [12] El resultado de este análisis produce las cuatro formas del esquema tradicional

El descubrimiento del silogismo como una *forma* de razonamiento necesitó el uso de símbolos para *expresar la forma* Este punto no debe exigir un examen más detenido [13] Sean cuales fueren los defectos de la lógica de Aristóteles, no puede negarse que su tratamiento del silogismo fue formal Su error principal no radica en ninguna falta de comprensión de la importancia de la forma, sino en no haber logrado llevar el análisis lo suficientemente lejos De tal suerte, Aristóteles no intentó simbolizar la *relación* que conecta los términos de una proposición, en consecuencia, no comprendió que el silogismo subsuntivo es sólo *una* forma de razonamiento demostrativo y que su validez depende de las propiedades formales de las relaciones que entran en el razonamiento De haberlo hecho así, difícilmente habría dejado de reconocer que la forma proposicional *Todo S es P* es diferente de la forma proposicional *Este S es P* Reconocer esta distinción es admitir que *Todo S es P* no es una proposición simple Es de lamentar que Aristóteles no intentara analizar el método de las matemáticas antes de haber desarrollado su teoría del silogismo De haberlo hecho así, podría haber llegado al descubrimiento de la variable lógica Su gran mérito consiste en haber generalizado una forma común de razonamiento exhibiéndola en forma simbólica Existe cierto fundamento para la concepción de Leibniz de que el silogismo "es como una matemática universal" [14] Pero no le fue dado a Aristóteles aprehenderlo desde este punto de vista [15]

[12] Debe observarse que Aristóteles llegó a este simbolismo partiendo de un análisis de todo el argumento Si hubiese intentado analizar una oración que expresara una definición, es sumamente improbable que la hubiese analizado en *dos* términos conectados por el verbo *ser* Una oración como "Todo acto justo tiene tales y cuales características" sería simbolizada naturalmente por "AX es BCD" Es en la utilización de "AX es BCD" como una premisa en un silogismo que "AX" y "BCD" deben ser tomados como todos únicos

[13] Véanse capítulo VI, § 6; capítulo X, § 1 del presente libro

[14] *New essays on the human understanding*, libro IV, capítulo XVII, § 9

[15] Las obras lógicas de Aristóteles han sido agrupadas por sus sucesores bajo el título de *Organon* ("el Instrumento"). Las obras son: (1) *Las categorías*, que trata de los nombres para las ideas fundamentales que están implicadas en todo pensamiento; (2) *De interpretatione*, que trata principalmente de la estructura del pensamiento tal como la revela el lenguaje; (3) *Analytica priora*; (4) *Analytica posteriora* Las últimas dos examinan la naturaleza de la demostración y de la inducción, consideradas como medios de

Antes de considerar el intento de Leibniz de desarrollar una ma emática universal, debemos referirnos brevemente a la concepción ıristotélica del razonamiento matemático En la *Analytica posteriora*, donde examina este asunto, dice Aristóteles: "Toda instrucción dada o recibida por medio de la argumentación procede de un conocimiento preexistente Esto se hace evidente cuando revisamos todas las especies de tal instrucción Las ciencias matemáticas y todas las otras disciplinas especulativas se adquieren de esta manera, asimismo las dos formas del razonamiento dialéctico: la silogística y la inductiva, pues cada una de estas últimas hace uso de conocimientos viejos para impartir conocimientos nuevos, el silogismo suponiendo un auditorio que acepta las premisas, y la inducción exhibiendo el universal como implícito en el particular claramente conocido" [16] Este pasaje muestra con claridad el importante lugar que asigna Aristóteles a las premisas indemostrables a partir de las cuales comienza toda demostración Él afirma constantemente que las premisas deben ser "mejor conocidas" que la conclusión y "previas" a ella Si no fuesen mejor conocidas, la conclusión no sería demostrada, si no fuesen previas, el razonamiento sería circular Estas premisas previas pueden ser dadas (1) por medio de definiciones que establecen el significado de las palabras o expre san la esencia de aquello que las palabras denotan; (2) por medio de supuestos acerca de la existencia de los géneros y las especies; (3) por medio de proposiciones que son inmediatamente evidentes y que deben ser conocidas a fin de que cualquier otra cosa sea conocida Estas últimas se llaman axiomas (ἀξιώματα) [17] Las concepciones de Aristóteles acerca de la función de la definición en las matemá ticas no son perfectamente claras Por una parte, afirma que "la definición es acerca de la naturaleza o el ser esencial de algo, y todas las demostraciones evidentemente proponen o suponen la naturaleza esencial: las demostraciones matemáticas, por ejemplo, la naturaleza de la unidad y lo impar, y todas las otras ciencias de manera similar", [18] por otra parte, mantiene que las definiciones no afirman si las cosas definidas existen o no [19] Es claro, sin embargo, que Aristóteles reconoció la estrecha relación entre las definiciones y los axiomas de un sistema matemático y vio que tanto las unas como los otros eran necesarios para la demostración Su análisis del razonamiento matemático se basaba en el supuesto, que compartía con Platón, de que hay objetos inteligibles (o *Ideas*) que las palabras representan y que son los objetos de la definición Esta teoría es conocida con el nombre de realismo lógico Aristóteles, por consiguiente, sostenía que

derivar principios generales (5) Los *Sophistici elenchi*, que tratan de la refu tación de las falacias sofísticas; (6) Los *Topica*, que tratan de la argumentación dialéctica

[16] *Anal. post*, 71*a*, 1 7

[17] *Ibid*, libro I, capítulo II *Cf.* libro I, capítulo XXXII

[18] *Ibid*, 90*b*, 30

[19] *Ibid*, 72*a*, 23

es absurdo suponer que las definiciones son meramente afirmaciones del significado de los nombres [20] Tal definición sería lo que ahora se llama definición nominal, mientras que la concepción de Aristóteles es la de que todas las definiciones son *reales*

El desarrollo de la generalización de la lógica está íntimamente relacionado con la distinción entre la definición real y la definición nominal Si todas las definiciones son reales, entonces los objetos a los que se refieren las definiciones deben ser dados por la intuición en el caso de aquellas definiciones que forman la base de un sistema deductivo Ésta fue, indudablemente, la concepción de Euclides; ella explica la creencia de que los axiomas son *necesariamente verdaderos*, puesto que se afirma que están relacionados con objetos que son dados. [21] Esta concepción fue criticada por Leibniz, quien reconoció que las definiciones son similares a la expresión de una cantidad por medio de una fórmula algebraica [22] Leibniz se vio llevado así a rechazar la concepción aristotélica de la definición como indicativa de un objeto que nos es *dado*, y a reconocer el papel que desempeña la definición en los sistemas deductivos Así, dice: "Las proposiciones, en toda ciencia, o bien son principios o bien son conclusiones Los *principios* o bien son definiciones, o bien son axiomas, o bien son hipótesis" Se dice que los axiomas son "proposiciones que todo el mundo considera evidentes y que, al ser examinadas más cuidadosamente, muestran ser derivadas de las definiciones" [23] Leibniz insistió en que los axiomas deben ser demostrados, pues dice "Estoy convencido de que, para la perfección de las ciencias, ciertas proposiciones llamadas axiomas deben ser demostradas, así como Apolonio ciertamente se tomó el trabajo de demostrar algunas de aquellas que Euclides dio por sentadas sin demostración" [24] Leibniz consideraba que sólo aquellas proposiciones que son proposiciones idénticas, tales como "A es A", eran indemostrables La reducción de los axiomas a proposiciones que eran idénticas o que eran consecuencias inmediatas de definiciones, estaba relacionada con la concepción leibniziana de una *Characteristica Universalis* Leibniz señaló que, mientras el idioma ordinario imita en el papel palabras que representan objetos, los ideogramas chinos y los jeroglíficos egipcios representan directamente los objetos mismos La *Characteristica Universalis* es un idioma ideográfico cada uno de cuyos caracteres o signos representa directamente

[20] *Ibid*, 92*b*, 25 35

[21] La distinción entre la definición *real* y la *nominal* fue reconocida por Guillermo de Occam (*Summa totius logicæ*, Oxford, 1675, libro I, § 26) y por Pascal (*Pensées*) y por los autores de la *Lógica de Port Royal* (libro I, capítulo XII, libro IV, capítulo V)

[22] Leibniz (1646 1716) consideró una definición *real* como un análisis de un concepto complejo que es *posible*, mientras que una definición *nominal* enuncia las características de algo sin mostrar que lo que es definido es posible

[23] *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (ed Couturat), p 32

[24] *Ibid*, pp 181 182

un concepto simple Tal carácter o signo lo llama Leibniz una "característica real" que podrían entender las personas que usan diferentes idiomas Leibniz advirtió que tal característica universal sería un lenguaje simbólico con la propiedad de ser tratado como un cálculo del razonamiento, como un álgebra Leibniz consideró que los caracteres o signos constituirían un "Alfabeto del pensamiento humano" correspondiente a todas las ideas simples posibles, estas ideas simples serían conceptos primitivos a partir de los cuales podrían construirse conceptos complejos por medio de reglas de combinación A este proceso de construir conceptos complejos dio Leibniz el nombre de "arte de la combinación", que es un cálculo del razonamiento De tal suerte, Leibniz concibió tanto la posibilidad de un cálculo del razonamiento como la posibilidad de una matemática universal, que ha dado lugar a la lógica matemática [25] Leibniz vio claramente que una matemática universal debía fundarse sobre unos cuantos conceptos primitivos arbitrariamente simbolizados; que deben introducirse nuevos conceptos mediante la sustitución de un solo símbolo en lugar del complejo de símbolos definidores; y, finalmente, que estos símbolos deben ser precisos, exactos y universales Su proyecto difería en dos aspectos importantes de las concepciones actuales de la lógica matemática En primer lugar, él no alcanzó a comprender que las *relaciones* implicadas deben ser analizadas En segundo lugar, él supuso que los conceptos primitivos serían necesariamente el resultado de un análisis correcto, puesto que habrían de ser dados por medio del alfabeto del pensamiento humano Esto es un error Los conceptos primitivos de un sistema deductivo, como hemos visto, no son *dados*, son, en cierta medida cuando menos, arbitrariamente seleccionados, en consecuencia, son posibles muchos sistemas deductivos diferentes

Leibniz no publicó sus investigaciones sobre estos tópicos, de modo que su trabajo no ha afectado el desarrollo subsecuente de la lógica matemática Este desarrollo siguió dos líneas principales, la una de acuerdo con el proyecto leibniziano de un cálculo del razonamiento, la otra de acuerdo con su concepción de una matemática universal Cada uno de estos desarrollos debe ser considerado brevemente

El desarrollo de un cálculo del razonamiento conduce directamente a la concepción de un sistema simbólico cuya significación está determinada por reglas de combinación y es, así, independiente de cualquier interpretación del sistema Desde este punto de vista, la lógica simbólica viene a ser el estudio de tipos especiales de sistemas deductivos, implica la investigación de diversas álgebras de la lógica Los fundamentos de la lógica simbólica fueron establecidos por George Boole [26] En un pasaje importante, dice Boole: "Aquellos que están familiarizados con el estado actual de la teoría del álgebra simbólica

[25] Véase *New essays on human understanding*, libro I, capítulo II § 22

[26] Boole (1815 1864) Sus obras principales son: *The mathematical analysis of logic* y *The laws of thought* Véase también "The calculus of logic" en el *Cambridge Mathematical Journal*, 1848

están conscientes de que la validez de los procesos del análisis no depende de la interpretación de los símbolos que se emplean, sino únicamente de las leyes de su combinación Todo sistema de interpretación que no afecte la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible, y es así como el mismo proceso puede, bajo un esquema de interpretación, representar la solución de un problema sobre las propiedades del número, bajo otro esquema puede representar la solución de un problema geométrico, y bajo un tercer esquema puede representar la solución de un problema de óptica" [27] Reconociendo que el lenguaje ordinario no es un medio perfecto para la expresión del pensamiento, Boole intentó crear un lenguaje simbólico adecuado para expresar exactamente lo que él llamó las "leyes del pensamiento" Se equivocaba, sin embargo, al suponer que estaba tratando ecerca del *pensamiento*, lo que él se proponía expresar eran *principios lógicos* puros. Así construyó una lógica simbólica, no ofreció un análisis del pensamiento Subrayó el hecho de que los elementos del lenguaje son *signos* Ahora bien, los signos son marcas arbitrarias a las cuales se les asignan interpretaciones fijas, los signos son susceptibles de combinación de acuerdo con reglas fijas que bastan para determinar la significación de la combinación Boole consideró que estos signos eran de tres clases, a saber, (1) símbolos literales, *x*, *y* que representan los objetos de nuestras concepciones, (2) signos de operación, tales como $+$, $-$, $\times$, por medio de los cuales los signos literales son combinados en afirmaciones significativas, (3) el signo de identidad, $=$, que Boole consideraba la relación fundamental

El contemporáneo de Boole, Augustos de Morgan, [28] comenzó un análisis concienzudo de las *relaciones* y las *operaciones* Este trabajo fue sumamente importante De Morgan usó un simbolismo mucho menos adaptado a las necesidades de un cálculo que el simbolismo algebraico de Boole, de modo que en cierta medida queda al margen de la línea principal de desarrollo Con el trabajo del filósofo norteamericano C S Peirce [29] se efectuó un avance considerable El profesor C I Lewis dice, refiriéndose a Peirce, que sus contribuciones a la lógica simbólica "son más numerosas y variadas que las de cualquier otro autor, cuando menos en el siglo XIX Él supo cómo aprovechar el trabajo de sus predecesores, Boole y De Morgan, y cons

[27] *The mathematical analysis of logic* (1847), p 3

[28] De Morgan (1806 1878) escribió muchas monografías sobre lógica matemática (véase la Bibliografía) También hizo contribuciones importantes a este tema en su *Formal logic* (1847) y en *Syllabus of a proposed system of logic* (1860)

[29] Charles Sanders Peirce (1839 1914) Los trabajos de Peirce fueron publicados en varias revistas que no son fácilmente accesibles para los estudiantes ingleses, y por eso durante algún tiempo su obra fue poco conocida en Inglaterra Muchos de sus trabajos no fueron publicados en vida del autor; éste dejó enormes masas de fragmentos que la Universidad de Harvard está publicando actualmente (véase la Bibliografía)

truyó sobre sus cimientos y prefiguró los procedimientos más importantes de sus sucesores, aun cuando no los elaboró por sí mismo Una y otra vez, uno encuentra en los escritos de Peirce la clave de los desarrollos más recientes " [80] El profesor Lewis señala que estas contribuciones caen dentro de tres secciones (1) Peirce distinguió las relaciones (tales como la multiplicación en el álgebra de Boole) que son características de las clases lógicas, de las relaciones (tales como la sustracción y la división) que están más íntimamente relacionadas con las operaciones aritméticas, efectuando así un considerable mejoramiento del álgebra booleana (2) Peirce utilizó el trabajo de De Morgan para hacer más preciso y más propiamente matemático el tratamiento de las relaciones y los términos relativos Fue el primero en establecer el método de tratar las proposiciones particulares tradicionales como *sumas*, y las proposiciones universales como *productos*, de proposiciones que contienen variables Así estableció el fundamento para la concepción de la *implicación formal* de Russell (3) Finalmente, Peirce "concibió la lógica simbólica como la ciencia de la forma matemática en general" En este aspecto siguió a Leibniz

Puede decirse que Boole, De Morgan y C S Peirce establecieron los lineamientos de la investigación subsecuente en la lógica simbólica Su trabajo fue continuado por Ernst Schroeder, [81] la doctora Christine Ladd-Franklin y Hugh MacColl [82] El desarrollo más elaborado del sistema de Boole se debe a Schroeder, cuyo trabajo fue una continuación de la concepción leibniziana de un cálculo del razonamiento en la forma de un álgebra de la lógica Una exposición resumida de tal cálculo carece de valor, el estudiante interesado debe consultar la propia obra de Schroeder

La segunda línea de desarrollo tuvo que ver con la construcción de un sistema deductivo que debería ser una "matemática universal", tal como la que Leibniz soñó pero no elaboró en detalle Pero, en tal construcción, la elaboración detallada paso a paso es totalmente importante Esta tarea ha ocupado la atención de los lógicos sólo durante los últimos cincuenta años El descubrimiento de sistemas de geometría no-euclidianos había hecho claro que los axiomas de un sistema geométrico son independientes de las intuiciones espaciales Éste es un descubrimiento de la mayor importancia En el capítulo x vimos que el reconocimiento de la naturaleza de los axiomas condujo a un análisis más riguroso de los conceptos fundamentales, este aná-

[80] *A survey of symbolic logic*, p 79 El estudiante interesado en el desarrollo histórico de la lógica simbólica no puede hacer nada mejor que consultar el libro del profesor Lewis

[81] Véanse *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (3 volúmenes publicados entre 1890 1895); *Der Operationskreis des Logikkalkulus* (1877); *Abriss der Algebra der Logik*, editado por E Muller

[82] C LADD FRANKLIN, "On the Algebra of Logic", *Studies in Logic*, Johns Hopkins University, 1887; H MACCOLL, *Symbolic Logic and its Applications*, Londres, 1906

lisis tiene como resultado el hacer explícitos todos los supuestos implicados en la construcción de un sistema deductivo dado Los fundamentos de este método de análisis fueron establecidos por Frege [33] Puesto que el propósito de Frege no fué el de desarrollar un cálculo por medio del cual los problemas lógicos pudiesen ser resueltos con rapidez y exactitud de una manera cuasi mecánica, sino el de analizar las relaciones lógicas que están implicadas en la aritmética, encontró que era necesario inventar símbolos no-algebraicos Para sus fines, era necesario subrayar las *diferencias*, y no las analogías, entre las relaciones lógicas y las operaciones de las matemáticas ordinarias Frege mostró cómo podría desarrollarse la aritmética a partir de premisas puramente lógicas Su método consistía en mostrar cómo las concepciones fundamentales de las matemáticas son susceptibles de ser definidas en términos de relaciones que entran en cualquier proceso complicado de razonamiento En esta forma intentó lograr la completa independencia de los sistemas deductivos respecto del proceso de contar o de las intuiciones de las relaciones espaciales El simbolismo de Frege, sin embargo, era tan innecesariamente complicado y difícil que el trabajo de éste pasó inadvertido, tanto así que buena parte de tal trabajo tuvo que hacerse de nuevo. El intento de completar el análisis de Frege lo han realizado Peano, Bertrand Russell y A N Whitehead Peano [34] efectuó un avance útil al inventar símbolos para las relaciones lógicas que eran de una forma diferente de la de los símbolos algebraicos ordinarios para las operaciones, pero los cuales, a diferencia de los de Frege, eran fácilmente aprehendidos Puede parecer extraño que la invención de una *forma* pueda tener consecuencias importantes para el análisis, pero ya hemos observado que una buena notación es una ayuda para el pensamiento claro Si usamos los *mismos* símbolos para significar *diferentes* relaciones es probable que nos confundamos y dejemos de notar diferencias importantes Entre los muchos servicios que Peano prestó a la lógica matemática, el de haber suministrado un simbolismo adecuado a los propósitos para los que había de ser usado no fue ciertamente el menos importante El trabajo de Frege y Peano ha sido continuado por Whitehead y Russell en su gran obra *Principia mathematica* Esta reseña del desarrollo de la ciencia de la lógica bien podría concluir con una breve consideración de los objetivos y los logros de esta obra

El problema principal de *Principia mathematica* consiste en *probar* que las matemáticas puras no son otra cosa que una extensión de la lógica formal Ya hemos visto [35] que Peano pudo mostrar que la aritmética puede reducirse a la aritmética de los números naturales

[33] Frege (1848 1925) *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (1884); *Grundgesetze der Arithmetik* (2 vols, 1893 1903)

[34] Peano publicó *Formulaire de mathématique* en intervalos de 1895 a 1908

[35] Véase el capítulo x, § 5

—es decir, los números enteros positivos— y que la totalidad de la aritmética puede deducirse de los tres conceptos primitivos *cero, número, sucedor de* Se plantea entonces el problema de qué es un número entero positivo El problema es si los números enteros positivos pueden analizarse en términos puramente lógicos o si implican una referencia a algo que no puede reducirse a la lógica [36] Russell mostró que tal análisis es posible En la Introducción a *Principia mathematica* los autores afirman haber sido guiados por tres propósitos diferentes Éstos son (1) efectuar el mayor análisis posible de los conceptos de las matemáticas y de los procesos de la demostración matemática, [37] (2) expresar las proposiciones matemáticas en la notación más conveniente a fin de asegurar la expresión más precisa, (3) desarrollar un sistema "especialmente construido para resolver las paradojas que, en años recientes, han preocupado a los estudiantes de la lógica simbólica y de la teoría de los agregados" Podemos decir desde ahora que este tercer objetivo no se ha alcanzado sino de manera muy imperfecta Estos tres objetivos son considerados por los autores como subsidiarios del propósito principal de *probar* que las matemáticas puras son derivables de la lógica pura Debemos observar exactamente qué es lo que ellos se proponen probar Ellos *no* se proponen probar ningún teorema matemático *dado*, intentan probar que *cualquier* teorema tal *se desprende de* principios puramente lógicos y que esta prueba no requiere *nada sino principios puramente lógicos* Para probar esto, los autores hallaron que era necesario, *en primer lugar*, analizar los conceptos utilizados, y *en segundo lugar*, hacer explícitos los axiomas implicados en la exhibición de la correlación de estos conceptos Encontraron que era necesario formular explícitamente los principios lógicos implicados, y, al hacerlo así, tuvieron que *usar* principios lógicos Este procedimiento parece ser circular, en cierto sentido lo es, pero la circularidad no es necesariamente viciosa Hay, sin embargo, razones para suponer que Whitehead y Russell se propusieron efectuar un análisis que no implicaba ninguna clase de circularidad Esto significaría que las proposiciones primitivas del sistema exhibido en *Principia mathematica* deben ser consideradas como propiamente *primitivas*, más bien que como proposiciones *indemostradas* [38] Si admitimos que este procedimiento es correcto, entonces podemos considerar que Whitehead y Russell han logrado, aparte ciertas máculas, su propósito principal, o sea establecer la derivación de las matemáticas puras, por medio de un procedimiento que se desarrolla paso a paso, a partir de los principios de la lógica pura

Peano había advertido ya claramente que lo fundamental en las matemáticas es la deducción a partir de funciones proposicionales,

[36] *Cf* el famoso dicho de Kroneker: "Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht; alles anderes ist Menchenwerk" (Los números enteros los ha hecho Dios; todo lo demás es obra del hombre)

[37] Véase p 207 del presente libro

[38] Véase el Apéndice C