Lo que estamos llamando "la clase" no es, sin embargo, *otro* individuo u objeto del mismo tipo que sus miembros, ni tampoco una *propiedad*, es el conjunto de cosas que tienen la propiedad No hay, pues, ningún objeto individual al que sea aplicable el nombre de clase, así, pues, el nombre de clase no *nombra* a ningún constituyente de la proposición en cuya expresión verbal aparezca el nombre de clase De tal suerte, la clase es una construcción lógica Pero una construcción lógica no es una ficción

Aunque puede haber cierto peligro de un uso demasiado precipitado de la navaja de Occam, ésta sugiere no obstante un principio metodológico útil que Russell ha llamado algunas veces el principio de "construcciones *versus* inferencias" Este principio puede enunciarse brevemente Cuando, para describir un conjunto de hechos, tenemos que suponer una entidad imperceptible, no debemos *inferir* que la entidad en cuestión existe, sino que debemos buscar algo que tenga las propiedades requeridas Esto es lo que se ha hecho al definir los puntos por medio de la abstracción extensiva En este caso encontramos que no era necesario suponer particulares simples *que fueran puntos*, puesto que podíamos reemplazarlos por una estructura compleja que tuviera las propiedades requeridas Como vimos, esto no significaba separar los puntos, sino mostrar con más claridad qué *son* exactamente los puntos El principio de "construcciones *versus* inferencias" puede considerarse como una encarnación del consejo: Llevad vuestro análisis tan lejos como sea posible, hasta mostrar que todo concepto es una función lógica de lo que se percibe sensorialmente

§ 4 *Lógica y matemáticas*

Siempre se ha reconocido que el razonamiento matemático es lógico, y que en consecuencia hay una conexión peculiarmente íntima entre la lógica y las matemáticas Pero, aunque todo el mundo concede que la lógica es *necesaria* para las matemáticas, sólo en tiempos muy recientes se ha visto que es *suficiente* Las matemáticas han sido definidas tradicionalmente como "la ciencia de la magnitud discreta y continua", o como "la ciencia de la cantidad" Aun Leibniz, que vio en la teoría del silogismo "una especie de matemática universal", siguió la tradición al circunscribir lo que debía llamarse propiamente "matemáticas" a la ciencia de la cantidad Tampoco es sorprendente que esta definición de las matemáticas haya parecido satisfactoria durante tanto tiempo La aritmética y el álgebra consideradas como ciencias relativas al *número*, la geometría considerada como una ciencia relativa a los *puntos*, *líneas*, *planos* y *volumenes*, parecerían quedar exactamente descritas al decirse que son relativas a la cantidad discreta y continua Es cierto que los *puntos* no son cantidades, pero, puesto que las relaciones entre los puntos pueden expresarse por medio de cantidades geométricas, el caso de los puntos no pareció hacer inadecuada la definición; sólo causó dificultades en relación con la naturaleza de los puntos Sin embargo, cuando la geometría proyectante, la teoría de los grupos abstractos y el álgebra de la lógica —para mencionar sólo unas pocas ramas de las matemáticas— fueron desarrolladas, se hizo obvio que no hay relación esencial alguna entre las matemáticas y la cantidad

El estudio de las matemáticas, como en el caso de las otras ciencias, tuvo su origen en el intento de ordenar la experiencia sensorial En el capítulo VIII vimos cuán difícil debe de haber sido el avance en la abstracción del pensamiento cuando se comprendió por primera vez que un conjunto de días, un conjunto de peces o un conjunto de manzanas podían tener todos ellos *el mismo número* Este grado de abstracción nos es tan familiar ahora que lo damos por descontado y creemos que sabemos lo que es el *número* Es posible que confundamos la familiaridad con la comprensión Puesto que los números con los que estamos familiarizados son los números finitos o inductivos, a los cuales es aplicable el proceso de contar, la noción del número del sentido común se basa, en considerable medida, en intuiciones derivadas del proceso de contar, mientras que la operación misma de contar permanece sin analizar En consecuencia, nuestra concepción del número es indebidamente restringida y oscura Hemos visto que el proceso de contar consiste en establecer una correlación de uno-uno, tomándose en cierto orden los objetos contados El proceso de contar, por lo tanto, presupone la noción de la similitud y es menos lógicamente simple, puesto que el proceso de contar requiere un orden pero la similitud no De aquí que la definición del número por medio de la similitud conduzca a una mayor generalidad De esta manera, la aritmética queda liberada de su dependencia respecto de la intuición A pesar de las ideas oscuras acerca de la relación entre el número y el proceso de contar, la mayor parte de las personas cultas probablemente admitirían que las propiedades del número que producen las reglas de la aritmética son independientes de lo que realmente existe Esto equivale a admitir que las proposiciones de la aritmética son *a priori*, es decir, susceptibles de ser conocidas independientemente de cualquier tema de estudio dado Es probable que haya cierta vacilación para admitir que hay una ciencia, llamada correctamente *geometría*, la cual es igualmente independiente de las intuiciones dadas en la experiencia Existe cierta justificación para tal vacilación Lo que ordinariamente se llama geometría debe distinguirse claramente de la aritmética, puesto que es una ciencia tan enteramente empírica como la dinámica y, por lo tanto, una rama de la ciencia natural Esta rama de la ciencia natural —que, por razones de conveniencia, podemos llamar "geometría empírica"— ha sido tradicionalmente confundida con la geometría como matemática pura A esta confusión se debió la creencia de que la geometría era una ciencia de la cantidad, relativa a las propiedades del espacio [9] Se supu-

[9] Así, por ejemplo, De Morgan, habiendo afirmado que "el espacio y el tiempo son las únicas materias necesarias del pensamiento", añade: "y éstos

so que los axiomas de la geometría eran descriptivos de nuestro espacio y que los teoremas de la geometría eran necesariamente verdaderos, pues se consideraba que eran demostrados por medio de los axiomas solamente Ahora, como vimos en el capítulo x, se sabe que esta concepción es errónea Hemos visto que el intento de deducir los teoremas de Euclides a partir de sus axiomas mostró que las deducciones de éste carecían de rigor lógico, puesto que exigían supuestos que no estaban incluidos en los axiomas pero que guardaban conformidad con nuestras intuiciones espaciales [10] Se reconoció que el axioma de las paralelas era menos *plausible* que los otros axiomas de Euclides, de modo que se hicieron muchos intentos de derivar el axioma de las paralelas de los otros Estos intentos fracasaron, y los matemáticos empezaron a construir sistemas geométricos basados en la negación del axioma de Euclides De esta manera surgieron las geometrías no-euclidianas que han desempeñado un papel tan importante en el desarrollo de las matemáticas y de la física matemática No es posible examinar aquí tal desarrollo [11] Basta observar que el resultado de este desarrollo fue el establecimiento del hecho de que toda geometría es rígidamente deductiva y no emplea ninguna forma de razonamiento que no se base en la aritmética Es decir, que una geometría pura es un sistema deductivo construido por medio de conceptos primitivos y proposiciones primitivas en la forma explicada en el capítulo x

Toda rama de las matemáticas consiste en afirmaciones de que tales y cuales proposiciones primitivas implican tales y cuales consecuencias Así, pues, una proposición matemática es de la forma *Si un conjunto de elementos x, y, z satisfacen tales y cuales condiciones, entonces esos elementos satisfarán también tales y cuales otras condiciones* La especificación de las condiciones determina la rama de las matemáticas que se está investigando; por ejemplo, la aritmética, la geometría proyectante, la geometría descriptiva, etcétera Así puede demostrarse que toda rama de las matemáticas consiste enteramente en proposiciones acerca de las propiedades de ciertas relaciones, tales como *estar en línea recta con*, o *ser el producto de*, que rigen entre ciertas entidades, tales como los *puntos* o los *números* Podría suponerse que primero debemos saber cuáles son las entidades entre las que rigen las relaciones afirmadas en las proposiciones primitivas Eso, sin embargo, sería un error Todo lo que se requiere es que las proposiciones primitivas sean mutuamente consecuentes Si los objetos que tienen las propiedades requeridas pueden encontrarse, enton

constituyen el asunto de las matemáticas" (*Proc London Mathematical Society*, vol I, p 1)

[10] El teorema de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos se desprende del postulado de las paralelas y puede guardar conformidad con nuestras intuiciones espaciales ordinarias La negación del postulado condujo, por una parte, a la geometría hiperbólica, y, por otra parte, a la geometría elíptica

[11] Véase CAJORI, *History of mathematics*

ces el sistema deductivo puede ser interpretado Por ejemplo, se nos podría dar un conjunto de objetos indefinidos que podríamos llamar arbitrariamente *objetos* X y *objetos* Y, y una relación indefinida R, y una proposición primitiva Si cualesquiera dos *objetos* X son dados, entonces hay un *objeto* Y, y sólo uno, con el que ambos *objetos* X guardan la relación R Podríamos interpretar los *objetos* X como *puntos*, los *objetos* Y como *líneas*, y la relación R como *está situado en* Esto da el teorema fundamental de la geometría plana: Si se dan dos puntos, hay una y sólo una línea en que ambos puntos están situados Otras interpretaciones serían posibles. Mientras nos ocupemos de la geometría pura —es decir, de la geometría como una rama de las matemáticas—, no tenemos que ocuparnos de ningún significado particular de "punto" o "línea" Así, pues, puede decirse que las matemáticas se ocupan de todos los significados *posibles*, es decir, de todos los objetos por medio de los cuales puedan interpretarse los teoremas, o bien puede decirse que no se ocupa de ningún significado [12] No podemos discutir aquí cuál es la manera preferible de expresar esto Sólo nos interesa observar que una ciencia matemática es un sistema deductivo que consiste en conceptos primitivos, proposiciones primitivas y deducciones de éstos

Las matemáticas aparecen, pues, como la ciencia de la prueba formal o la demostración lógica Hace sesenta años un matemático norteamericano, Benjamín Peirce, definió las matemáticas como "la ciencia que extrae las conclusiones necesarias" [13] Éste fue el primer reconocimiento explícito de que las matemáticas son independientes de cualquier tema de estudio dado Peirce, por cierto, llega a afirmar que "las matemáticas, según esta definición, pertenecen a toda investigación, lo mismo moral que física" De tal suerte, las matemáticas vienen a ser la ciencia del razonamiento exacto Esto señala un avance notable en la comprensión de la naturaleza de las matemáticas La definición de Peirce no es, sin embargo, del todo completa, deja sin explicar qué puede significarse por "conclusiones necesarias" La norma de exactitud, del rigor lógico de una demostración, ha cambiado Este cambio se debe al hecho de que los matemáticos han estado tratando de hacer que todos sus supuestos sean explícitos, debido al hecho de que ellos han abandonado el recurso a la intuición [14] Den

[12] Esta segunda concepción ha sido atribuida a Hilbert y sus seguidores, quienes constituyen lo que se conoce como escuela formalista de matemáticos Véase más adelante el Apéndice C El lector también puede consultar dos artículos de F P RAMSEY, "Mathematical logic", en la *Mathematical Gazette* (octubre, 1926); y "The foundations of mathematics", en *Proc London Mathematical Society* (agosto, 1926); y C I LEWIS, *Survey of Symbolic Logic*, capítulo VI, § 3

[13] *Linear Associative Algebra*, § 1 (1870, reimpreso en el *American Journal of Mathematics*, vol IV, 1881)

[14] Incluso Gauss, uno de los más grandes matemáticos, publicó pruebas que hoy no se considerarían suficientemente rigurosas Por ejemplo, su primera prueba del teorema de que toda ecuación algebraica tiene una raíz cons-

tro de un momento consideraremos si el ideal de la exactitud ha sido alcanzado Bertrand Russell ha ofrecido una definición más satisfac toria, que completa la de Peirce De acuerdo con su concepción, todos los conceptos de las matemáticas pueden definirse en términos impli cados en cualquier tipo de razonamiento complicado, y todas las proposiciones matemáticas pueden deducirse de proposiciones de la lógica formal [15] De tal suerte, las matemáticas pueden definirse como la ciencia que se ocupa de "la deducción por principios lógicos a partir de principios lógicos". [16] Estos principios lógicos son los principios de todo razonamiento Se desprende de esta definición que las matemáticas son indistinguibles de la lógica pura Al examinar la estruc tura de los sistemas deductivos, examinábamos la estructura de las matemáticas Los lógicos modernos han demostrado detalladamente que esta concepción de las matemáticas es justificada. Peano logró de rivar la aritmética de los números inductivos —es decir, los números cardinales finitos— de cinco proposiciones primitivas y tres conceptos primitivos [17] Estos conceptos son *cero, número, sucesor de* Frege y Russell mostraron independientemente que estos conceptos podían definirse en términos de las nociones puramente lógicas de *clase, perteneciente a una clase* y *similitud* Así se demostró que la aritmética es una rama de la lógica pura Anteriormente se había mostrado que los sistemas geométricos no podían interpretarse como aplicables a los números Así se ha logrado el análisis de las matemáticas en términos de conceptos lógicos fundamentales. El sistema matemático de *Principia mathematica* ha demostrado la equivalencia de las matemáticas y la lógica, pues, partiendo de premisas que todo el mundo debe admitir que son puramente lógicas, se deducen resultados que todo el mundo debe admitir que pertenecen a lo que ordinariamente se llama matemáticas Russell afirma: "Si todavía hay quienes no admiten la identidad de la lógica y las matemáticas, podemos desafiarlos a que indiquen en qué punto, en las definiciones y deducciones sucesivas de *Principia mathematica*, consideran ellos que termina la lógica y comienzan las matemáticas Será obvio entonces que cualquier respuesta debe ser del todo arbitraria" [18] Esto debe concederse [19]

tituye un ejemplo del uso de la intuición en lo que se ofrecía como una prueba absolutamente rigurosa

[15] La definición exacta de Russell es: "Las matemáticas puras son la clase de todas las proposiciones de la forma 'p implica q', donde p y q son pro posiciones, y ni p ni q contienen ningunas constantes, excepto constantes ló gicas" (*Principles of mathematics*, p 3)

[16] RUSSELL, *loc cit*

[17] Para una descripción del procedimiento de Peano, véase B RUSSELL, *Int Math Phil*, capítulos I III

[18] *Op cit*, p 194

[19] Debe observarse que lo que se requiere para las matemáticas es que los axiomas sean consecuentes En el capítulo x vimos que la consecuencia sólo podría establecerse al encontrarse una interpretación para la cual los axiomas sean verdaderos Estos objetos no pueden tomarse del mundo real, puesto

Ahora debemos considerar en qué medida se ha alcanzado el ideal del rigor lógico Surge una dificultad en relación con el concepto de *clase* En el intento de llevar a cabo una deducción estrictamente rigurosa de las propiedades generales de las clases y relaciones a partir de las premisas lógicas fundamentales, ciertas contradicciones se hicieron aparentes Comenzaremos por considerar la contradicción de Russell respecto a las clases que no son miembros de sí mismas De ordinario no supondríamos que una clase es un miembro de sí misma Por ejemplo, la clase de todas las *mesas* no sería considerada ella misma como una *mesa*, ni la clase de todos los *hombres* como un miembro de sí misma, es decir, un *hombre* Pero podría ser natural suponer que la clase de las cosas que no son hombres no es ella misma un hombre y, por lo tanto, un miembro de sí misma Esta suposición, sin embargo, conduce a la contradicción Esta contradicción puede mostrarse fácilmente si damos a una clase que no se contiene a sí misma como un miembro el nombre de *clase ordinaria* Entonces representemos por medio de O la clase que consta de todas las clases ordinarias Ahora tenemos que considerar si O es un miembro de sí misma o no Si O es un miembro de O, se desprende *de la hipótesis de que* O *es una clase ordinaria* que O no es un miembro de O; si O no es un miembro de O, se desprende *de la hipótesis* que O es un miembro de O Así, pues, cualquiera de las dos suposiciones —a saber, que O es un miembro de sí misma y que no es un miembro de sí misma— conduce a la contradicción Russell se enfrentó a esta contradicción distinguiendo diferentes tipos lógicos En el capítulo IX vimos que una clase que consta de individuos no es ella misma un individuo Si dijéramos que *tanto* la clase *como* los individuos son "entidades", estaríamos usando la palabra "entidad" en dos sentidos diferentes Así, pues, tenemos que reconocer que los objetos son de diferentes tipos lógicos, y que cualquier predicado dado puede ser afirmado significativamente acerca de un solo tipo de sujeto Por ejemplo, es significativo afirmar que "Sócrates es un hombre", pero *carece de significado* afirmar que "Una clase es un hombre" Por consiguiente, debemos reconocer que las proposiciones acerca de los individuos no son de la misma forma que las proposiciones acerca de las *clases de individuos* De manera similar

que ello dejaría al método abierto a las incertidumbres del método experimental; deben tomarse, por lo tanto, de otras ramas de las matemáticas Por lo que se refiere a la geometría, es posible tomar los números reales y mostrar que ellos satisfacen los axiomas Por ejemplo, "punto" puede interpretarse como aplicable a una tríada ordenada de números (x, y, z); "plano" puede interpretarse como aplicable al conjunto de tales tríadas ordenadas que satisfacen una ecuación lineal, y así sucesivamente Pero cuando intentamos investigar la consecuencia de los axiomas formulados por Peano para los números reales, no podemos hallar ninguna rama *más simple* de las matemáticas que pueda proporcionar una interpretación De aquí la necesidad de la reducción de estos conceptos a la lógica debemos reconocer que las proposiciones acerca de las *clases* no son de la misma forma que las proposiciones acerca de las *clases de clases*, y así sucesivamente Estas diversas proposiciones serán de diferentes órdenes, siendo el orden dependiente del *tipo* Así, pues, si decimos que las proposiciones acerca de los individuos son del primer orden, entonces las proposiciones acerca de las clases de individuos serán del segundo orden, y así sucesivamente De acuerdo con esta teoría de los tipos lógicos, debemos admitir que tanto la afirmación "Una clase es un miembro de sí misma" como la afirmación "Una clase no es un miembro de sí misma" son estrictamente carentes de significado. Nuestra incomprensión de que tales afirmaciones no son falsas, sino *carentes de significado*, se debe a nuestro hábito inveterado de suponer que toda oración gramaticalmente correcta debe ser significativa

Tenemos que distinguir además entre los diferentes órdenes de propiedades aplicables al mismo tipo de sujeto Según la concepción de Russell, las proposiciones acerca de las clases son proposiciones acerca de las propiedades que definen a las clases Así, una proposición acerca de una clase (por ejemplo, los grandes poetas) será una proposición acerca de todas las propiedades que definen la clase Debemos considerar entonces si existen dificultades en relación con las proposiciones acerca de *todas las propiedades* Es claro que sí existen Por ejemplo, dado un objeto A, podemos preguntar si A tiene alguna propiedad de la índole Φ Si A tiene tal propiedad, entonces el que A tenga esta propiedad será otra propiedad de A Llamemos esta propiedad F Entonces podemos preguntar si F puede ser una propiedad de la índole Φ Parece claro que no puede serlo Por ejemplo, si decimos "Shakespeare tenía todas las características que pertenecen a un gran poeta", entonces "características" no se entendería de tal manera que pudiera incluir una propiedad tal como *tener todas las características de un gran poeta*, puesto que esta propiedad presupone la totalidad de tales características Así, pues, si A tiene una propiedad de la índole Φ, entonces la propiedad F —o sea, tener la propiedad de la índole Φ— no puede ser ella misma una propiedad de la índole Φ Así, pues, F es una propiedad de un orden superior que Φ Cualquier propiedad que sea definida por medio de *todas las propiedades* de cierto orden, debe ser entonces una propiedad de un orden superior [20]

Esta teoría de los tipos nos permite evitar la contradicción respecto a las clases y respecto a las afirmaciones acerca de todas las propie-

[20] El principio implicado en la teoría de los tipos se llama "el principio del círculo vicioso", y Russell lo enuncia así: "Cualquier cosa que comprenda a *todos* los miembros de una colección no debe ser uno de los miembros de la colección " La violación de este principio tiene como resultado totalidades ilegítimas (Véase *Principia mathematica*, Introducción, capítulo II, p 37 *Cf* también F P RAMSEY, *The foundation of mathematics*, p 356 Ramsey ha señalado que la teoría de los tipos se divide en dos partes distintas que tienen que ver, respectivamente, con dos grupos diferentes de contradicciones No podemos detenernos a examinar esto aquí)

dades de cierta clase. La teoría, sin embargo, tiene consecuencias desafortunadas La distinción de tipos invalida algunos de los teoremas más fundamentales del análisis [21] Para evitar esta dificultad, Russell introdujo el *axioma de reductibilidad* [22] Este axioma afirma que para cualquier propiedad de un orden superior hay una propiedad equivalente del orden inferior Esta equivalencia no es una equivalencia de *significado*, sino de *extensión* Vale decir, que cualquier cosa que tenga una propiedad tiene la otra, de modo que las dos propiedades definen la misma clase en el sentido de que tienen la misma extensión Así, pues, las propiedades son *formalmente equivalentes* Así, el axioma afirma que dada cualquier propiedad de orden superior hay una propiedad del orden inferior *que tiene la misma extensión* (es decir, que es aplicable a los mismos objetos) que la propiedad de un orden superior Este axioma implica que cualquier clase que sea definida como la extensión de una propiedad de orden superior, será también la extensión de una propiedad del orden inferior Se desprende del axioma que la totalidad de las clases cuyos miembros son de un tipo dado, pueden obtenerse de la totalidad de las propiedades del orden inferior que son aplicables a ese tipo La totalidad así obtenida

[21] Así, por ejemplo, invalida el teorema de que cualquier agregación de números tiene un límite superior Este teorema es deducido del principio de la sección Dedekindiana, que es el siguiente: Si los números reales se dividen en dos clases, A_1 y A_2, de tal modo que (i) cada número pertenezca o bien a A_1 o bien a A_2; (ii) cada clase contenga cuando menos un miembro; (iii) cualquier miembro de A_1 sea menor que cualquier miembro de A_2; entonces hay un número *n* que tiene la propiedad de que cualquier número menor que *n* pertenece a A_1 y cualquier número mayor que *n* pertenece a A_2 El número *n* puede pertenecer a A_1 o a A_2, puesto que *n* es el número mayor de A_1, o el número menor de A_2 Así, los números reales se dividen en dos clases mutuamente excluyentes, una superior y una inferior, y debe haber un número que divida estas dos clases, que es o bien el menor de la clase superior o bien el mayor de la clase inferior Esta prueba depende de que se definan los números reales como secciones de racionales Las secciones de racionales son una especie especial de *clases* de racionales; por lo tanto, las proposiciones acerca de los números reales serán proposiciones acerca de una especie de clase de racionales Ahora podemos ver cómo se produce la invalidez Supóngase que hay un conjunto A de números reales; U, el límite superior de A, es definido como la clase de los racionales que son miembros de cualquier miembro de A Así, U son todos aquellos racionales que tienen la característica de tener cualquiera de las características que definen a los miembros de A De tal suerte, la característica definidora de U implica una referencia a *todas* las características definidoras de los miembros del conjunto de los números reales, de modo que U no será un número real, puesto que es una sección de racionales definidos por características de un orden superior Así, pues, esta prueba se derrumba si se acepta la teoría de los tipos (Véase G H HARDY, *Pure mathematics*, § 18)

[22] Véase *Principia mathematica*, Introducción capítulo II, §§ 6, 7 y * 12 *Cf* también *Int Math Phil*, capítulo XVII, y RAMSEY, *loc cit*

será una totalidad legítima La aceptación de este axioma basta, entonces, para asegurar la validez de los teoremas en el análisis

No puede afirmarse, sin embargo, que este axioma de reductibilidad es evidente por sí mismo No es puramente lógico, como lo son las otras proposiciones primitivas de *Principia mathematica* En consecuencia, este sistema no logra alcanzar un rigor lógico completo Trabajos recientes de L Wittgenstein y F P Ramsey han mostrado que la dificultad debida a la naturaleza insatisfactoria del axioma de reductibilidad puede ser superada Ramsey ha sugerido una reconstrucción del sistema de *Principia mathematica* en la que el axioma de reductibilidad ya no es necesario No es posible examinar este desarrollo aquí [28] Hemos dicho lo suficiente para indicar la enorme dificultad de efectuar un análisis completo de los conceptos matemáticos en términos de conceptos puramente lógicos, y de construir un sistema deductivo completamente riguroso que comprenda todas las ramas de lo que ordinariamente se llama matemáticas Pero, a pesar de las dificultades que se presentan en la labor de completar la construcción, debe admitirse que ésta ha mostrado que las matemáticas son idénticas a la lógica como la ciencia de la forma pura

El logro del ideal de la forma pura es también el logro de la abstracción completa y de la generalidad completa No es necesario un examen más detenido para demostrar que esto es así Puede que valga la pena, sin embargo, subrayar la importancia del hecho de que la demostración es independiente del tema de estudio Reconocer esta independencia del tema de estudio es reconocer que toda prueba lógica es formal La palabra "prueba" se usa algunas veces en un sentido en que tiene que ser distinguida de "demostración", o sea, "prueba lógica" El primer uso puede hacerse claro por medio del contraste entre el propósito de tal prueba, que consiste en producir *convicción*, y el propósito de la prueba lógica En el capítulo x vimos que no nos *convencemos* de la verdad de la ley conmutativa $m \times n = n \times m$ cuando seguimos su deducción en los *Principia mathematica* El propósito de la deducción es la demostración, no la convicción Es por esta razón que la construcción de un sistema tal parece exigir, como cuestión de hecho psicológico, que una rama de las matemáticas haya sido desarrollada en grado considerable antes de que pueda aplicarse el método del análisis Si este método no es primordialmente un método para producir convicción, menos aún es un método de descubrimiento Su ideal no es el descubrimiento, sino la demostración Conviene, ciertamente, precavernos contra un posible malentendido Al decir que las matemáticas se reducen a la lógica, estamos diciendo que las matemáticas pueden exhibirse como una estructura completamente lógica, de modo que ningún elemento de intuición intervenga en una prueba matemática Pero decir esto no es decir que el proceso del descubrimiento matemático está constreñido al razonamiento deductivo Por

[28] Véanse los artículos de F P Ramsey, antes citados, y también el Apéndice C

el contrario, el matemático usa todos los recursos de la perspicacia científica Imagina, confía en analogías, se orienta por la intuición geométrica y por una sensibilidad para la forma pura que lo lleva a hacer descubrimientos importantes Pero los teoremas matemáticos, no importa cómo puedan haber sido descubiertos, deben ser susceptibles de formulación abstracta y de demostración por medio de métodos puramente lógicos Una rama de las matemáticas es un conjunto de proposiciones susceptibles de formulación abstracta en tal forma que pueda demostrarse que toda proposición se desprende de los conceptos primitivos y las proposiciones primitivas Puede considerarse entonces que las matemáticas consisten en todos los sistemas deductivos completamente abstractos