Serie A			Serie B		
Calificación	*Tabulación*	*Frecuencia*	*Calificación*	*Tabulación*	*Frecuencia*
0 9			0 9		
10 19			10 19	x x	2
20 29	x x	2	20 29		
30 39	x x	2	30 39	x	1
40 49	x	1	40 49	x x	2
50 59	x x x	3	50 59	x x x x	4
60 69	x x	2	60 69		
70 79			70 79	x	1
80 89			80 89		
90 99			90 99		

La diferencia entre la calificación máxima y la mínima se llama *la amplitud* de la serie Así, la amplitud de (A) es 46 y la de (B) es 59 La amplitud es una medida de variabilidad De los datos en (B) se dice que se *dispersan* más que los datos en (A), es decir, que hay mayores desviaciones respecto de la media

Si consideramos ahora la frecuencia de clase, vemos que en ambas series la frecuencia mayor ocurre en el intervalo de clase 50-59 El punto medio del intervalo de clase con la mayor frecuencia se llama el *modo* Ésta es otra forma de promedio, es decir, una medida de tendencia central El modo representa aquella calificación que tiene más probabilidades de ocurrir No debe confundírsele con la media, que es lo que usualmente entendemos por un promedio Este punto puede quedar bien ilustrado por medio de las anotaciones del juego de cricket Supóngase que un jugador que frecuentemente anota 0, logra anotar, una vez que ha "afinado el ojo", 70, 80 o incluso 100, entonces su anotación más probable será 0, pero su promedio podrá ser 20 o 30 Si las desviaciones son pequeñas, de modo que las desviaciones pequeñas tengan tantas probabilidades de ocurrir como las grandes, entonces el modo, la media y la mediana tienden a coincidir [16]

Puesto que la amplitud depende solamente de dos miembros extremos, no es una medida muy satisfactoria de la variabilidad Por lo tanto, se acostumbra calcular lo que se llama la *desviación media* Si organizamos los miembros de la serie (A) alrededor de la tendencia central, podemos obtener la desviación de cualquier miembro restándolo de la media si es menor, y restándole la media si es mayor Estas desviaciones serán representadas por signos de + y de — Así

[16] Véase W P y E M Elderston, *Primer of statistics*, pp 21 y 45

obtenemos, —23 8, —21 8, —13 8, —7 8, + 2, +7 2; +8 2, +11 2, +18 2, +22 2

La desviación media será, entonces, 13 44 Éste es simplemente el promedio de las desviaciones, ignorando el signo De la misma manera podemos calcular la desviación media de la serie (B) Es 14 Los estadísticos generalmente utilizan lo que se llama la *desviación standard* Ésta es la raíz cuadrada de la suma de las desviaciones cuadradas divididas entre el número de datos Por lo tanto, difiere de la desviación media en cuanto que las desviaciones son cuadradas antes de ser sumadas, y después de la división de la suma entre el número de datos, se extrae la raíz cuadrada La desviación *standard* es simbolizada por σ Puede expresarse en la fórmula

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

donde d representa desviaciones de la media, y Σ significa "la suma de", n representa el número de datos La desviación *standard* se emplea generalmente Si la desviación es grande, muestra que los miembros de la serie están dispersos

Ahora podemos resumir las tres formas de promedio La media es el promedio ordinario Usualmente se calcula con facilidad

La mediana es el medio de la serie cuando ésta ha sido organizada en orden Por lo tanto, hay tantos datos por encima de ella como por debajo Es importante no suponer que la mediana sea el medio de la amplitud Éste será el caso sólo cuando la distribución de frecuencia sea simétrica

El modo es el caso más probable

Es importante recordar que todo promedio es una medida de tendencia central, representando así un punto en una escala De tal suerte, una distribución de frecuencia puede representarse gráficamente por medio de una curva obtenida al delinear las frecuencias de los intervalos de clase en la escala de clase. Éste es, indudablemente, el método más sencillo para tratar con grandes números de casos Pero no podemos examinarlo minuciosamente aquí [17]

Ahora tenemos que considerar la relación entre las variables medidas Si el economista desea determinar si existe una relación entre la renta urbana y la densidad de población, debe obtener en primer lugar estadísticas relativas a estas variables Luego debe determinar si el aumento de los valores de una variable va acompañado por el aumento, o la disminución, de la otra variable Por los ejemplos dados al comienzo de este párrafo, podemos ver que *correlación* significa grado de relación funcional Si la correlación entre dos variables es perfecta, entonces existe entre ellas una relación de correspondencia

[17] Para un examen más amplio de los métodos estadísticos, véanse los libros que ofrecemos en la bibliografía

funcional Es costumbre limitar la palabra "correlación" a la correspondencia imperfecta Así, a la correlación entre la velocidad de un cuerpo que cae y el tiempo, si es perfecta, se le llama una relación de correspondencia funcional Esta relación es *positiva*, mientras más tiempo ha estado cayendo un cuerpo, más rápidamente cae La relación entre la atracción gravitativa de dos cuerpos y la distancia entre sus centros es perfecta y negativa El grado de correlación se expresa por medio de un número que varía de +1 a —1 Así, pues, una correlación positiva perfecta se expresaría por +1, una correlación negativa perfecta se expresaría por —1 Éstas son relaciones funcionales Por lo tanto, podemos decir que el grado de correlación varía de + 99 a — 99 Este número se llama el *coeficiente de correlación* Es importante recordar que este coeficiente es un número puro, no presenta un *por ciento* Una correlación de + 5 se llama "cinco décimos" o "cincuenta" *No* es cincuenta *por ciento* Representa un grado de correlación intermedio entre una correlación perfecta, o relación funcional, y una *ausencia total* de correlación Una ausencia total de correlación no es, por ejemplo, una correlación *negativa*, es simplemente *ausencia* de correlación Por ejemplo, hay una correlación negativa entre la presión y el volumen de un gas a una temperatura constante, hay ausencia total de correlación entre el tamaño de la cabeza de un hombre y la cantidad de sus ingresos Hay, quizá, una ligera correlación positiva entre el monto de los ingresos que *gana* un hombre y su capacidad en cierta esfera de actividad

Un grado alto de correlación, positiva o negativa, sugiere una relación causal o funcional Por ejemplo, si hubiese un alto grado de correlación positiva entre el número de piezas de vajilla rotas por las camareras de un restaurant y la cantidad de su fatiga, no parecería improbable que la fatiga fuese un factor en la causación de los rompimientos de las piezas de vajilla

A fin de poder obtener coeficientes de correlación —es decir, de medir la correlación de las variables—, es esencial encontrar una unidad cuantitativa *en términos de la cual* puedan medirse las variables En el caso de las llamadas estadísticas vitales —a saber, aquellas relativas a los nacimientos, defunciones, matrimonios, etcétera—, la unidad es fácil de descubrir Pero los métodos estadísticos se están utilizando con frecuencia cada vez mayor para tratar características que no pueden aprehenderse fácilmente como variables cuantitativas Las estadísticas de los resultados de las pruebas mentales se basan en el supuesto de que *la inteligencia, la memoria, la rapidez del pensamiento* pueden medirse en términos cuantitativos El trabajo inicial de determinar las unidades cuantitativas adecuadas para medir las variables, requiere la mayor perspicacia y habilidad Antes de que tal trabajo se haya realizado adecuadamente, es improbable que la psicología experimental logre un avance considerable en la presentación de resultados interpretables Es, asimismo, de fundamental importancia en el trabajo estadístico determinar con precisión el campo dentro del cual se supone que rigen las mediciones A menos que esto se haga cuidadosamente, la interpretación de los resultados, que es la parte más difícil de la investigación estadística, será probablemente engañosa e incluso completamente carente de valor Por ejemplo, hace poco dos periódicos londinenses se propusieron investigar si las creencias religiosas se encuentran en decadencia En cada uno de los periódicos se publicó un cuestionario y se invitó a los lectores a contestarlo Se publicó un resumen estadístico de las respuestas recibidas, y sobre este resumen se ha basado cierto razonamiento dudoso acerca de la decadencia de las creencias religiosas Las dificultades en lo que se refiere a extraer una inferencia confiable a partir de tales resultados deben ser obvias Aun concediendo que las preguntas fueran formuladas de tal modo que permitieran respuestas precisas y esclarecedoras, no parece haberse hecho ningún intento de corroborar los resultados o de determinar el campo de la investigación No es irrazonable suponer que sólo cierto tipo de lector haya contestado el cuestionario, de modo que las relaciones relativas a *todos* los lectores son muy poco dignas de confianza Los resultados así obtenidos no son susceptibles de interpretación precisa, debido precisamente a que no se delimitó el campo de la investigación La única manera de evitar tales errores consiste en describir cuidadosamente qué se propone lograr con exactitud la investigación estadística Debe enunciarse la naturaleza exacta de las preguntas formuladas; debe delimitarse con precisión el campo sobre el cual ha sido efectuada la investigación Sólo cuando se ha logrado esto es posible extraer inferencias confiables e interpretar provechosamente los resultados Esta labor preliminar es a menudo muy difícil, y entraña métodos complicados y técnicos. Consecuentemente, hay una tendencia, no del todo innatural, a sobreestimar la importancia y la confiabilidad de los resultados estadísticos así obtenidos. Como ha señalado el profesor Whitehead, "no existe un error más común que el de suponer que, porque se han hecho cálculos matemáticos exactos y prolongados, la aplicación del resultado a algún hecho de la naturaleza es absolutamente cierta" [18] La *afirmación* de las correlaciones no es, en sí misma, un procedimiento inductivo, la inferencia inductiva se da sólo cuando hay generalización de las correlaciones observadas a los casos inobservados J M Keynes ha señalado la necesidad de distinguir entre estas dos partes de la teoría de las estadísticas Dice: "La primera función de la teoría es puramente *descriptiva* Ella elabora métodos numéricos y diagramáticos por medio de los cuales pueden describirse brevemente ciertas características salientes de grandes grupos de fenómenos; y proporciona fórmulas con la ayuda de las cuales podemos medir o resumir las variaciones en algún carácter particular que hayamos observado a lo largo de una extensa serie de acontecimientos o casos La segunda función de la teoría es *inductiva* Se propone extender su descripción de ciertas características de acontecimientos observados a las corres-

[18] *Introduction to mathematics*, p 27

pondientes características de otros acontecimientos que no han sido observados Esta parte del asunto puede llamarse la teoría de la in ferencia estadística" [19] El desarrollo de la segunda parte es difícil y está ligado con la teoría de la probabilidad No podemos examinar esto aquí Todo lo que nos interesa señalar es que la afirmación de una frecuencia estadística no puede considerarse como una generalización inductiva La forma en que las generalizaciones pueden derivarse a partir de frecuencias estadísticas es por medio de frecuencias de pro babilidad Esto plantea difíciles problemas cuyo examen implicaría una cantidad de matemáticas mayor que la que puede introducirse en un libro como éste

§ 4 *Probabilidad*

Puede suponerse que todo el mundo tiene una concepción aproximada del significado de "probabilidad" Lo oponemos, por una parte, a la *certeza*, y por la otra a la *imposibilidad* Así, por ejemplo, decimos que hoy probablemente lloverá, o que A probablemente no pasará su examen, etcétera Pero, usada así, la probabilidad no es una concepción clara, indica tan sólo falta de convicción absoluta de que algo sucederá o no sucederá En las matemáticas, la probabilidad puede ser definida exactamente La teoría de la probabilidad ha sido elaborada en una forma refinada Sin embargo, en la medida en que la teoría es lógicamente exacta, es una rama de las matemáticas y su examen no es más adecuado en un libro de introducción a la lógica que el de la teoría de los números complejos Pero acaso valga la pena indicar qué significado se le da al cálculo de probabilidades

Si en la discusión ordinaria decimos "La ocurrencia de E proba blemente sucederá", significamos que las razones para suponer que sucederá son más fuertes que las razones para suponer que no sucede rá Reconocemos que una ocurrencia puede ser más o menos proba ble Hay todos los grados de probabilidad entre la certeza de que E no sucederá y la certeza de que sucederá Si deseamos afirmar exacta mente *cuán* probable es su ocurrencia, debemos contar el número de razones favorables a la producción de E y el número de razones que son desfavorables y que, por lo tanto, pueden ofrecerse en contra de la ocurrencia de E Contar las razones a favor y en contra significa analizar la situación de modo que se pueda determinar cuáles facto res son favorables y cuáles son desfavorables Es natural representar la probabilidad de la ocurrencia de E como la proporción de los fac tores favorables respecto de los factores desfavorables junto con los favorables Así, la certeza será representada por 1 y la imposibilidad por 0 Si los factores favorables son representados por r y los factores desfavorables por r', entonces la probabilidad será representada por

[19] *A treatise on probability*, p 327

$^{r}/_{r+r'}$. La contingencia *a favor* de que suceda es representada, entonces, por $^{r}/_{r'}$; la contingencia *en contra* por $^{r'}/_{r}$

Puesto que E o bien sucederá o bien no sucederá, la suma de la probabilidad de que suceda y la probabilidad de que no suceda debe ser 1 Es decir, $1 = E + E'$ (donde E' expresa "no-E") En consecuencia, si p representa la probabilidad de que E sucederá, entonces $1 - p$ representa la probabilidad de que E no sucederá

Los principios envueltos en el cálculo de probabilidades pueden aclararse por medio de ejemplos muy simples Elijamos el problema bien conocido del juego de dados, puesto que los factores envueltos son simples y pueden contarse con facilidad

(i) ¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojar un dado, salga el *seis*?

Es claro que hay seis maneras en que puede caer un dado, y que éste debe caer en una u otra de estas seis maneras De éstas, una es favorable y cinco no lo son Por lo tanto, la probabilidad requerida es $^{1}/_{6}$

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que, al echar un dado, no salga el *seis*?

La probabilidad requerida es, claramente, $^{5}/_{6}$

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que, si se echan dos dados juntos, salga el *seis* en ambos?

Puesto que cada dado tiene seis caras, y puesto que cada una de estas caras puede salir con cualquiera de las seis caras del otro dado, hay entonces, claramente, treinta y seis posibles combinaciones Sólo una de estas combinaciones es favorable Por lo tanto, la probabilidad requerida es $^{1}/_{36}$

La probabilidad de sacar el *seis* con un dado no depende, ciertamente, de la probabilidad de sacar el *seis* con el otro Tales acontecimientos se llaman *independientes* La probabilidad de que ambos sucedan es la conjunción de sus probabilidades separadas, a saber $(^{1}/_{6} \times {}^{1}/_{6}) = {}^{1}/_{36}$ Así obtenemos la regla para calcular la probabilidad conjunta de dos o más acontecimientos independientes, que es la siguiente: *Multiplíquense sus probabilidades separadas*

(iv) ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los dados, echados juntos, salga el *seis*?

Éstos son acontecimientos claramente independientes La probabilidad de no sacar el *seis* es, en cada caso, $^{5}/_{6}$ Por lo tanto, la probabilidad requerida es $(^{5}/_{6} \times {}^{5}/_{6}) = {}^{25}/_{36}$

(v) ¿Cuál es la probabilidad de que en sólo uno de dos dados echados salga el *seis*?

Aquí es indiferente que el *seis* salga en el primer dado o en el segundo Usando números subscritos para distinguir un dado del otro, podemos representar el caso en que sale el *seis* por medio de s_1 o de s_2, y el caso en que no sale seis por σ_1 o por σ_2 Entonces, o bien requerimos $s_1\sigma_1$ o bien $s_2\sigma_2$ Hemos visto que la probabilidad de s es $1/6$; hemos visto que la probabilidad de σ es $5/6$ Por lo tanto, la probabilidad de $s_1\sigma_1$ es $(1/6 \times 5/6)$; la probabilidad de $s_2\sigma_2$ es también $(1/6 \times 5/6)$ Por lo tanto, la probabilidad de *cualquiera de los dos* $s_1\sigma_1$ o $s_2\sigma_2$ es

$$[(1/6 \times 5/6) + (1/6 \times 5/6)] = (5/36 + 5/36) = 10/36$$

Los acontecimientos $s_1\sigma_1$ y $s_2\sigma_2$ son acontecimientos exclusivos o alternativos Por lo tanto, la probabilidad de su disyunción es la suma de sus probabilidades separadas La operación aritmética correspondiente a una suma lógica es la adición

(vi) ¿Cuál es la probabilidad de que, de dos dados echados juntos, cuando menos en uno salga el *seis*?

Puesto que en este caso no excluimos *ambos*, el único caso excluido es *ninguno* Por lo tanto, la probabilidad requerida es equivalente a la suma de (i) ambos, (ii) sólo uno, (iii) sólo el otro, es decir,

$$[(1/6 \times 1/6) + (1/6 \times 5/6) + (1/6 \times 5/6)] = 11/36$$

Debe observarse que la probabilidad de obtener el *seis* con *un dado cuando menos* y la probabilidad de obtener el *seis* con *ninguno*, agotan los casos posibles, por lo tanto, debemos tener *o bien un caso o bien el otro*; por lo tanto, la suma de los dos casos debe ser igual a 1 Estas probabilidades separadas son $11/36$ (por vi) y $25/36$ (por iv) Esto produce

$$(11/36 + 25/36) = 36/36 = 1$$

El acontecer o no acontecer de un acontecimiento dado agota las posibilidades Esto puede expresarse en la fórmula

$$E + E' = 1$$

Así vemos otra vez (por el principio del medio excluido) que la probabilidad de acontecimientos exclusivos es una suma lógica Las fórmulas de De Morgan pueden aplicarse [20] Si expresamos la probabilidad de que A sucederá escribiendo A, y de que B sucederá escribiendo B, entonces AB representa la probabilidad de que ambas ocurrirán, A' + B' representa la probabilidad de que una u otra no ocurrirá Entonces tenemos

$$\text{(i)} \quad (A + B)' = A'B'$$

$$\text{(ii)} \quad (AB)' = A' + B'$$

[20] Véase el capítulo x, p 224 del presente libro El lector que haya omitido el capítulo x debe omitir este párrafo

Éstas pueden expresarse así:

(i) La probabilidad de que ni A ni B ocurrirán es equivalente al producto de la probabilidad de que A no ocurrirá y de que B no ocurrirá

(ii) La probabilidad de que A y B no ocurrirán ambas es equivalente a la suma de la probabilidad de que A no ocurrirá y de que B no ocurrirá

Se advertirá que estas fórmulas producirán los mismos resultados dados anteriormente en (iv) y en (vi)

Del mismo modo que las fórmulas de De Morgan pueden desarrollarse para abarcar casos de cualquier complejidad, así las reglas que hemos dado pueden aplicarse para abarcar casos en los que estén envueltos más de dos factores No podemos examinar éstos aquí

Baste con señalar que, al calcular probabilidades, se debe tener gran cuidado para determinar si los acontecimientos son independientes, dependientes o exclusivos El principio fundamental es el mismo, ya sea que los acontecimientos sean dependientes o independientes Pero si los acontecimientos son independientes, entonces en cada caso ocurren todas las posibilidades Por ejemplo, la probabilidad de obtener *cara* en el lanzamiento de una moneda es $^1/_2$ Esta probabilidad permanece inalterada no importa cuán frecuentemente haya salido *cara*, a menos que estemos calculando la probabilidad de que *cuando menos cierto número* de caras saldrán en cierto número de lanzamientos Si un acontecimiento es dependiente de otro, entonces su probabilidad puede calcularse sólo después de que se haya calculado la probabilidad del acontecimiento independiente Esto significa que, en el caso de los acontecimientos dependientes, tenemos condiciones iniciales diferentes

Ha sido costumbre enunciar ciertas fórmulas para el cálculo de la probabilidad de que una ocurrencia E sucederá otra vez Pueden distinguirse dos casos: (i) la probabilidad de que E sucederá una vez más; (ii) la probabilidad de que E sucederá *v* veces más Estos casos pueden subdividirse a su vez, según que: (*a*) se sepa que E no ha fallado, (*b*) se sepa que E ha fallado.

(i*a*) Si se sabe que E ha sucedido *m* veces y se sabe que no ha fallado, entonces la proporción de los casos favorables respecto al número total de casos *en el pasado* es representada por $^m/_m$ Con base en el supuesto de que E lo mismo puede suceder que no suceder, debe añadirse 2 al denominador (a saber, la posibilidad favorable y la desfavorable) y 1 al numerador (a saber, la posibilidad favorable). Por lo tanto, la probabilidad requerida es representada por $^{m+1}/_{m+2}$

(ii*a*) Usando *m* como antes, la probabilidad de que E sucederá *v* veces más es $^{m+1}/_{m+v+1}$

(*ib*) Usando m como antes, y representando el número de veces que se sabe que E ha fallado por m', la probabilidad requerida es representada por $^{m+1}/_{m+m'+2}$

(*iib*) Usando m, m', v como antes, la probabilidad requerida es representada, como es fácil de ver, por $^{m+1}/_{m+m'+v+1}$

Una consideración de estas fórmulas mostrará que (1) mientras más grande sea m, más cerca de la unidad estará la fracción, y, por lo tanto, mayor será la probabilidad de que E sucederá; (2) mientras más grande sea m', o mientras más grande sea v, menor será la probabilidad de que E sucederá

La fórmula $^{m+1}/_{m+2}$ se conoce como la *Regla de Sucesión de Laplace* [21] Su validez depende del supuesto de que las alternativas posibles son *igualmente probables* Este supuesto sólo se justifica bajo ciertas condiciones muy artificiales, y sólo cuando las alternativas posibles son de la misma forma [22] El dejar de reconocer esto ha conducido a resultados absurdos Por ejemplo, si se supone que el acontecer o no acontecer de una ocurrencia, respecto a las condiciones de las que no se sabe *nada*, es igualmente probable, entonces la probabilidad de su ocurrencia siempre sería $^1/_2$, puesto que en tal caso m sería igual a 0 [23] Dados ciertos supuestos, sin embargo, y con las debidas precauciones, la fórmula puede aplicarse a casos especiales [24]

§ 5 *Medición*

El análisis cuantitativo presupone medición "El alcance de una discusión sobre la cantidad", dice el profesor Whitehead, "puede definirse por medio de la pregunta: ¿Cómo es posible la medición?" [25] No es posible hacer aquí ningún intento de examinar esta cuestión en forma adecuada Todo lo que podemos hacer es indicar la naturaleza de la medición y señalar las principales condiciones que la hacen posible [26] Todo el mundo tiene una concepción vaga de lo que sig-

[21] Véase VENN: *The logic of chance*, capítulo VIII

[22] Véase p 465 del presente libro

[23] Estos absurdos fueron señalados por C S PEIRCE (Véase *Chance, love, and logic*, parte I, sec 4) Estas fórmulas han sido criticadas detalladamente por el doctor C D BROAD y por J M KEYNES.

[24] Los estudiantes que deseen un tratamiento más completo de las reglas elementales para calcular la probabilidad, pueden consultar a C Smith, *A treatise on algebra*, capítulo XXX; o a WELTON, *Manual of logic*, libro V, capítulo VI

[25] *The principle of relativity*, p 40

[26] Para un examen más amplio de la medición, véanse N R CAMPBELL, *Physics: The elements*, parte II; *What is science?*, capítulos VI VII; A D RITCHIE, *Scientific method*, capítulo V

nifica medición Todos tenemos, en ciertas ocasiones, la necesidad de hacer mediciones más o menos exactas El cocinero, por ejemplo, mide la cantidad de harina que se requiere para cierto pastel; el sas tre mide cierta cantidad de tela y toma las "medidas" de su cliente para hacerle un traje que le quede bien En todos esos casos, una determinada propiedad de un objeto es correlacionada con un número seleccionado en cierta forma El cocinero dice que el *peso* de la harina es 1 kilogramo, el sastre dice que la *longitud* de la tela es 3 metros, etcétera Peso y longitud son cantidades Para determinar la cantidad de tela requerida, el sastre usa una cinta o una vara de medir, para determinar la cantidad de harina requerida, el cocinero usa una báscula de cocina En ambos casos, la medición entraña la manipulación física de objetos, el uso de un instrumento de medir y un juicio de comparación Cada uno de estos puntos exigirá mayor consideración, pero antes de examinarlos debemos tomar nota de una característica familiar e importante de la operación de la medición Supongamos que deseamos cubrir con un trozo de bayeta la parte superior de una mesa para juegos de salón A fin de obtener la cantidad correcta de bayeta (a saber, una cierta área) no tenemos que llevar la mesa a la tienda donde venden la bayeta Medimos la parte superior de la mesa y encontramos que su longitud es de un metro por cada lado Pedimos entonces un metro de bayeta (suponiendo que el ancho de la bayeta no sea menos de un metro). El vendedor mide un metro de bayeta sobre una marca de medir en el mostrador o sobre una vara de medir Si encontramos que la bayeta mide un metro de an cho también, concluimos que la bayeta le servirá a la mesa Si pudiéramos suponer que estas operaciones de medir han sido ejecutadas correctamente, entonces podríamos saber que la bayeta le serviría a la mesa aunque no la hubiésemos colocado sobre ésta De esta característica depende la utilidad de la medición para fines prácticos

Una consideración de estos ejemplos mostrará que la medición conlleva la abstracción de ciertas propiedades de los objetos, y que depende de ciertas convenciones tan usuales que bien podríamos no reconocer su carácter convencional La posibilidad de obtener la cantidad adecuada de bayeta para cubrir la mesa, aun cuando ésta esté en casa y la bayeta en una tienda, depende del hecho de que se han establecido correlaciones de uno-uno (i) entre nuestra cinta de medir y la parte superior de la mesa, (ii) entre ~~la~~ vara de medir del vendedor y la bayeta, (iii) entre *nuestra* cinta y *su* vara, de tal suerte que ambos significamos lo mismo al decir "un metro" Ahora bien, es claro que (i) y (ii) son posibles únicamente en la medida en que podamos comparar directamente la cinta o vara de medir, con la parte superior de la mesa o la bayeta, respecto a cierta propiedad, y podamos juzgar inmediatamente que hay una correspondencia entre ellas Al suponer (iii), estamos suponiendo que, si la cinta y la vara se colocaran la una al lado de la otra, corresponderían en la misma forma en que la vara correspondió con la bayeta y la cinta correspondió con la parte superior de la mesa Podemos suponer (iii) sólo porque hemos adoptado un sistema convencional que nos permite referirnos, de una manera perfectamente definida, a un instrumento de medición normado (o *standard*) Hemos visto que, al medir la longitud de la mesa, hacíamos antes que nada un juicio de comparación que podría expresarse por: "Esta medida métrica corresponde a la longitud de la mesa " Debemos, pues, considerar en primer lugar esta relación de *correspondencia* [*"matching"*]

La afirmación "A corresponde con B" es elíptica Dos trozos de tela pueden corresponder respecto del color, o del tamaño, o de la textura, etcétera Ahora bien, la vara de medir y la bayeta no corresponden respecto del color, ni de la textura, ni de la dureza, pero (así lo estamos suponiendo) corresponden respecto de la *longitud* La longitud es una propiedad que puede medirse, de modo que decimos que la longitud es una cantidad Así, pues, la afirmación elíptica "A corresponde con B" debe ser ampliada a "A corresponde con B respecto de la longitud" Ahora bien, la relación de correspondencia es simétrica y transitiva, de modo que si A corresponde con B, entonces B corresponde con A, y si A corresponde con B, y B corresponde con C, entonces A corresponde con C Nuestra suposición de que nuestra cinta de medir y la vara de medir del vendedor *correspondían respecto de la longitud* se basaba en el hecho de que la correspondencia es una relación transitiva, y que tanto nuestra cinta como la vara del vendedor correspondían con una *vara normada* (o *standard*) Así, pues, la medición de longitud entraña una referencia a una vara de medir *standard* con la cual corresponden, respecto de la longitud, todas nuestras diversas cintas o varas de medir El hecho de que no tengamos que llevar ni la mesa ni la cinta de medir a la tienda donde venden la bayeta, se debe al hecho de que hemos adoptado un sistema convencional por medio del cual anexamos números definidos para representar diferentes longitudes Así, cuando decimos que la bayeta tiene "un metro de largo", significamos que la proporción de su longitud con un metro es de uno Dada esta norma de referencia, que recibe el nombre de *la unidad de longitud*, podemos describir todas las otras longitudes en términos de la unidad por medio de números reales

Estas consideraciones sugieren la siguiente definición La medición es el proceso de manipular objetos a fin de asignar proporciones para representar alguna propiedad de estos objetos. Es importante distinguir entre medir y contar, y entre medir y numerar Considérese, por ejemplo, una colección de libros en una biblioteca. Contamos los libros para saber cuántos hay El resultado de este proceso de contar se expresa por medio de un número cardinal [27] También podríamos desear encontrar fácilmente cualquier libro mediante el conocimiento del lugar que ocupa en los estantes Para este fin, adoptamos un sistema de numeración o de "marcas" Es decir, adoptamos alguna

[27] Para un examen del proceso de contar, véase p 150 del presente libro

organización ordenada Seleccionamos letras del alfabeto, o numerales, o una combinación de ambos cuyo orden corresponda a la posición de los libros Así, el resultado del contaje de los libros proporciona una respuesta a la pregunta: ¿Cuántos?, y el resultado de su numeración proporciona una respuesta a la pregunta ¿En qué colocación? Ninguno de estos procesos es medición Pero si quisiéramos saber cuántos libros cabrían en cierto estante, necesitaríamos saber la longitud del estante y la longitud del lomo de cada libro, o, como acostumbramos decir, su grueso Así, pues, tendríamos que medir los libros y medir el estante para ver cómo corresponderían los primeros con los segundos respecto de la longitud En la práctica, probablemente tomaríamos algunos de los libros y los pondríamos en el estante; ciertamente no nos tomaríamos la molestia de aplicar una vara de medir Los juicios de correspondencia respecto de la longitud pueden hacerse con sorprendente exactitud por medio de la simple vista Veremos que todas las mediciones exactas dependen, en última instancia, de un juicio directo en relación con la correspondencia de dos datos sensoriales visuales Pero cuando el objeto que vamos a medir es muy grande, o cuando se requiere que la medición sea muy exacta, encontramos que es necesario colocar el objeto junto a algún otro objeto por medio del cual ha de medírsele De esta manera podemos hacer juicios de comparación directos El resultado de la operación de medir se expresa, pues, como una proporción del objeto medio respecto del instrumento de medición, y, por lo tanto, en última instancia, respecto de la unidad normada (o *standard*) Así vemos que los números usados para expresar medición no son números cardinales, sino proporciones Este hecho es oscurecido por nuestra adopción de la convención de que la unidad normada (o *standard*) debe ser igual a uno [28]

La longitud se mide por medio de la yuxtaposición del objeto que va a ser medido con una vara de medir, o, como la llamaremos de ahora en adelante, con una escala Hay otras maneras de medir, pero en última instancia toda medición de longitud es reductible a este proceso, puesto que ésta es la forma en que usamos la norma de longitud Ahora podemos ver cómo toda medición de longitud depende de la observación de datos sensoriales *Vemos* la coincidencia de una marca en la escala con el borde del objeto que se mide No hay manera de evitar este juicio directo de coincidencia, aunque podemos usar artefactos mecánicos que nos colocan en una posición más favorable para hacer juicios exactos Pero, no importa cuán cuidadosamente observemos, siempre subsiste un error en la medición Éste recibe algunas veces el nombre de "error inherente" de la medición

[28] Así, si decimos que la longitud de una mesa es de 10 metros, significamos que la proporción de su longitud respecto de la medida metro es 10 Puesto que la unidad de medición se elige como igual a 1, obtenemos la proporción 10:1, de modo que en la práctica no reparamos en el denominador

Podemos ver cómo sucede esto si comparamos un proceso rudimentario de medición con un proceso más exacto Podríamos haber medido la mesa extendiendo nuestra mano, de meñique a pulgar, sobre su parte superior, substituyendo sucesivamente el dedo meñique por el pulgar hasta cubrir toda su extensión Si hacemos esto, podemos decir que la mesa mide n palmos Si repitiéramos este proceso, es probable que el resultado no produjera n palmos, sino un poco más o un poco menos Podríamos representar esto como $n + e$ Si no podemos dividir el palmo, entonces la mayor exactitud de la medición será determinada por la extensión del palmo Ahora bien, si usamos una escala marcada en subdivisiones mucho más pequeñas que la longitud de la propia escala, podemos obtener una medición más exacta Esto es lo que hacemos con un metro, pues lo dividimos en centímetros, milímetros, etcétera Pero, no importa cuán pequeñas hagamos estas subdivisiones, no podemos obtener una coincidencia exacta, pese al hecho de que el objeto medido pueda parecer coincidir con dos marcas de la escala El hecho de que haya longitudes inconmensurables —por ejemplo, los lados y la diagonal de un cuadrado— revela que puede no haber una proporción numérica exacta entre cualesquiera dos longitudes Así, pues, toda medición es sólo una aproximación, aunque podemos aumentar el grado de aproximación tanto como lo deseemos La escala es una norma de rectitud y una norma de rigidez Es fácil saber que si medimos con una cinta no debemos estirarla en una ocasión y dejarla floja en otra Por esta razón la medida normada de longitud se hace con el material más rígido que podemos encontrar [29]

Ahora debería resultar claro que la medición conlleva la manipulación de cuerpos, por lo tanto es experimental, y las reglas de la medición son leyes experimentales Si no pudiéramos encontrar cuerpos que juzgamos constantes respecto a la longitud, no podríamos llevar a cabo los procesos de medición ordinarios Ahora tenemos que advertir que la medición conlleva la adición de cuerpos Es por esta razón que la medición se expresa por medio de números, pues la serie de números tiene la propiedad de que dos o más números cualesquiera pueden ser reemplazados por otro número que será igual a la combinación de estos números. Así, pues, la medición se hace de acuerdo con las leyes de la aritmética Puesto que la correspondencia en longitud es una relación simétrica transitiva que puede expresarse por medio de un número, las longitudes pueden ser sumadas Las escalas son un recurso para la adición de longitudes Como ya hemos visto, lo que se añadirá serán proporciones, pero debido a nuestra convención de que la unidad es igual a uno, éstas pueden expresarse por medio de números Ahora bien, la característica de la serie de números (finita) es que la adición de un número a cualquier otro

[29] No es posible entrar aquí en el problema del significado de "rigidez", ni de su relación precisa con "longitud" Para un examen de este problema, véase A S EDDINGTON, *Space, time and gravitation*, "Prologue"

aumenta el número Aquí encontramos la característica en virtud de la cual algunas propiedades de cuerpos son mensurables Ésta puede enunciarse precisamente de la siguiente manera: Una propiedad de un cuerpo es mensurable si la combinación de cuerpos que tienen esa propiedad aumenta la propiedad, del mismo modo que un número es aumentado por la adición de otros números Es en virtud de este hecho que los objetos medidos pueden ser organizados en un orden Por lo tanto, en la medición entra una relación asimétrica transitiva que basta para ordenar los objetos medidos en una serie Éste es claramente el caso en lo que se refiere a la longitud Ahora tenemos que ver que lo mismo rige en relación con el peso

El peso de un cuerpo significa la fuerza con que tiende a caer Esto se llama "peso absoluto" El peso absoluto varía en diferentes lugares de la Tierra, haciéndose menor mientras más cerca del Ecuador se halle el lugar Pero sabemos experimentalmente que todos los cuerpos son afectados de esta manera en la misma proporción En consecuencia, dos cuerpos que tienen el mismo peso en cualquier lugar de la Tierra tienen el mismo peso en cualquier otro lugar Así reemplazamos el peso absoluto por lo que se llama peso relativo El peso relativo de un cuerpo expresa cuántas veces su peso absoluto es mayor o menor que el peso absoluto de un cuerpo normado (o *standard*) llamado la unidad de peso Esta unidad normada es seleccionada arbitrariamente y es un trozo de platino-iridio que se guarda en París Se llama el *kilogramo* La norma científica es una milésima parte de este peso, llamado un *gramo* El peso de un cuerpo se mide colocándolo en el platillo de una balanza y añadiendo pesos conocidos en el otro platillo hasta que se obtiene el equilibrio El juicio de que los platillos están en equilibrio se hace observando la coincidencia de un indicador con una línea en la escala De tal suerte, la medición del peso se reduce a una medición de longitud y se ve que, en última instancia, depende de un juicio inmediato de que dos datos sensoriales visuales coinciden

Ahora debemos enunciar brevemente las reglas fundamentales de la medición Ellas son: (1) Dos cuerpos que corresponden con un tercero respecto a la propiedad dada (longitud, peso), corresponden entre sí; (2) La adición de objetos que tienen la misma propiedad dada aumenta esa propiedad de acuerdo con las leyes de la aritmética; (3) La adición de iguales produce iguales Es un hecho experimental que estas reglas rigen respecto a algunas de las propiedades de los cuerpos Podría haber sido el caso que la adición de pesos en el platillo de la balanza no aumentara el peso Si ése hubiese sido el caso, la medición habría sido imposible Las dos únicas propiedades de los cuerpos que satisfacen directamente la segunda regla son la longitud y el peso Por lo tanto, la medición de estas propiedades constituyen el proceso fundamental Esto puede verse claramente si consideramos la propiedad de la densidad La densidad es *el peso dividido por el volumen* Si añadimos un litro de agua a dos litros, aumentamos el peso y la masa del agua, pero no aumentamos su densidad Por lo tanto, la densidad no es directamente mensurable Pero, puesto que el peso dividido por el volumen produce un número, y puesto que estos números pueden organizarse en un orden que representa el aumento de la densidad, la densidad puede medirse indirectamente Esto puede resumirse en la afirmación de que la densidad es proporcional al peso por unidad de volumen

La importancia de la medición reside en el hecho de que, por medio de ella, pueden enunciarse relaciones *precisas* entre cuerpos que poseen propiedades mensurables De tal suerte, la medición hace posible la aplicación del análisis matemático al comportamiento de los cuerpos naturales Sólo por medio de la medición puede llevarse a cabo el análisis cuantitativo preciso Por lo tanto, el valor de la medición es el valor de la sustitución de la variación cuantitativa por las uniformidades cualitativas Por medio de la medición podemos emplear el principio de la convergencia en la simplicidad mediante la disminución de la extensión