X LA GENERALIZACIÓN DE LA LÓGICA

> "Toda ciencia que ha florecido, ha florecido sobre sus propios símbolos; la lógica que, como todos admiten, es la única ciencia que no ha progresado durante siglos, es la única que *no ha desarrollado símbolos*" —Augustus de Morgan

§ 1 *El ideal de la lógica*

Todos los lógicos han reconocido que la lógica tiene que ver con la forma, pero sólo hasta tiempos recientes se ha reconocido que hay una ciencia de la lógica pura que tiene que ver exclusivamente con la forma Existe una amplia divergencia de opiniones entre quienes se dan a sí mismos el nombre de lógicos en relación con los tópicos que pertenecen propiamente a la lógica y en relación con su modo de tratamiento Muchos libros que pretenden versar sobre lógica han sido escritos únicamente desde el punto de vista de la argumentación cotidiana, con la intención confesada de mostrar cómo ciertas proposiciones importantes para la humanidad *pueden ser confirmadas* y cómo las afirmaciones de quienes impugnan esas proposiciones pueden ser *refutadas* Así concebida, la lógica viene a ser considerada como el *arte de pensar* En consecuencia, se ha puesto mucho énfasis en las falacias incidentales al lenguaje y en las *causas* de las creencias erróneas No cabe duda de que tal estudio es útil, pero es preciso distinguirlo de la lógica Debido a la limitación de su interés por la crítica del pensamiento reflexivo tal como éste ocurre en los problemas prácticos, en los descubrimientos científicos y en las controversias teológicas, los primeros lógicos sólo hicieron un débil intento de descubrir los principios formales de la prueba Tal descubrimiento presupone el intento de analizar los diversos tipos de argumentación a fin de separar su validez formal de cualquier tema o asunto dado El uso del lenguaje significativo del habla cotidiana tiende a ocultar la forma y a fomentar la confusión de la lógica con el arte de la controversia La *Lógica de Port-Royal*, por ejemplo, constituye un buen ejemplo de una obra que pertenece más bien al arte de la contro versia que a la lógica [1] Elabora trivialidades técnicas que no conducen a una aprehensión de los principios formales envueltos en el razonamiento correcto Los lógicos de Port-Royal se consideraban a sí mismos como continuadores de la tradición de Aristóteles, pero hay buenas razones para creer que el propio Aristóteles fue el primer lógico que se interesó primordialmente por la forma Ciertamente, el primer intento de exhibir los principios formales de la deducción se le puede atribuir a él [2] Aristóteles vio claramente que las proposiciones tienen *forma*, y que esa forma es lo esencial para la deducción Como lo expresa el profesor Whitehead: "Aristóteles fundó la ciencia al concebir la idea de la forma de una proposición y al concebir que la deducción tiene lugar en virtud de las formas Asimismo, en su teoría de la forma, tanto Aristóteles como los lógicos subsiguientes se aproximaron mucho a la teoría de la variable lógica Pero aproximarse mucho a una teoría verdadera y aprehender su aplicación precisa son dos cosas muy diferentes, como nos lo enseña la historia de la ciencia Todo lo que es importante lo ha dicho anteriormente alguien que no lo descubrió " [3]

Ya hemos subrayado la importancia de la forma y hemos visto que el silogismo es una forma de la implicación, deductiva exclusivamente en virtud de su forma Considérese, por ejemplo, el silogismo *Si todos los políticos son inconsecuentes y Baldwin es un político, entonces Baldwin es inconsecuente* Aquí afirmamos que la premisa compuesta implica la conclusión No afirmamos que Baldwin es inconsecuente, ni que es un político, ni que todos los políticos son inconsecuentes Estas proposiciones pueden ser verdaderas Si creemos que las premisas son verdaderas, aceptaremos la conclusión como verdadera Pero el lógico puro no está interesado en la verdad o falsedad de las premisas, sólo está interesado en la implicación, es decir, en *la forma* Si en lugar de "Baldwin" ponemos "Bernard Shaw", o "mi perro", o "este escritorio" o cualquier otro individuo dado, la implicación sigue siendo válida De manera similar, en lugar de "inconsecuente" podríamos poner "rico", o "esperanzado", o "gordo" o "trivial", en lugar de "políticos" podríamos poner "tiburones", o "telegramas" o "ratones", y la forma permanecería inalterada Pero el lógico puro no desea considerar ninguna sustitución dada que pudiera hacerse, no le interesa hacer afirmaciones acerca de las cosas individuales que pueden estar en el mundo real y que tienen interés para nuestra vida cotidiana y

[1] La *Lógica de Port Royal* fue publicada por primera vez en París en 1662, con el siguiente título: *La Logique ou l'Art de Penser, contenant outre les Regles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement*

[2] Véase capítulo VI, § 6 y *cf* capítulo XXV, § 2 más adelante Aun una lectura superficial de las *Analíticas* de Aristóteles mostrará que éste se proponía exhibir la forma El contraste entre la naturaleza de esta indagación y la de, por ejemplo, los lógicos de *Port Royal* es notable

[3] *Proc Arist Soc*, N S, XVI, p 72

para el científico Puesto que *cualquiera* de estas sustituciones no afecta la validez de la forma, debemos rehusarnos a escoger cualquier sustitución *dada* En consecuencia, podemos tomar x en lugar de *Baldwin*, β en lugar de *inconsecuente*, α en lugar de *políticos*, siempre y cuando que α y β sean símbolos variables para representar clases y x un símbolo variable para representar un individuo Así obtenemos: *Si todas las αs son βs y x es una α, entonces x es una β*, como la forma de todo silogismo que consta de una premisa que relaciona dos clases (de las cuales una está incluida en la otra) y una premisa que relaciona un individuo con una clase (siendo esa clase la clase incluida) Los silogismos acerca de *políticos, tiburones*, etcétera, son casos particulares que ejemplifican esta forma En la forma proposicional pura de la implicación, los constituyentes materiales son reemplazados por variables, y la forma es expresada por constantes lógicas Puesto que es completamente formal, no hay referencia a ningún caso dado, se puede afirmar la implicación acerca de cualquier cosa que pueda adaptarse a la forma Por lo tanto, es completamente general El ideal del lógico es la generalidad completa; el lógico alcanza este ideal haciendo que sus afirmaciones sean completamente formales

La aprehensión de la forma depende de la aprehensión de la constante lógica y de la variable lógica Pero lo que ocupa el primer lugar en la lógica, bien puede ocupar el último en el conocimiento El desarrollo histórico de una ciencia refleja el desarrollo mental del hombre Del mismo modo que el niño aprehende primero que este conjunto dado de dos cubos con aquel otro conjunto dado de dos cubos es igual a este otro conjunto de cuatro cubos, y sólo gradualmente llega a ver que *cualquier* conjunto de dos objetos sumado a *cualquier* otro conjunto de dos objetos es igual a *cualquier* conjunto de cuatro objetos, así una ciencia empieza por establecer una conexión entre un hecho particular y otro, y sólo gradualmente desentraña aquellas propiedades de las cuales depende la conexión No ocurre de otra manera con la lógica Primero se advierte que *esta* proposición está relacionada de tal modo con *aquella* proposición que se puede deducir la segunda de la primera Posteriormente, las propiedades de las cuales depende la deducción son aprehendidas como tales Sólo como resultado de un largo proceso de desarrollo ha sido posible comprender que toda deducción depende de las propiedades *formales*, es decir, *lógicas*, de los términos que entran en el razonamiento

Puesto que la forma proposicional determina qué constantes materiales se pueden adaptar a la forma, los diferentes tipos de constantes lógicas representan los diferentes tipos de deducción que son posibles El defecto principal de los lógicos tradicionales consiste en que no han podido aprehender más de una forma de deducción Aristóteles se limitó a la consideración de aquella forma de deducción que es más obvia al sentido común, a saber, el silogismo subsuntivo El desarrollo reciente de la lógica ha mostrado que el silogismo subsuntivo es un caso especial de la propiedad formal de la transitividad, que pertenece a la relación de inclusión, o subsunción De esta propiedad depende la validez del silogismo Más aún, Aristóteles no alcanzó a distinguir las dos formas diferentes de silogismo que han sido llama dos tradicionalmente subsuntivos Si bien Aristóteles empleó símbolos literales para expresar los *términos* del silogismo, empleó el lenguaje ordinario para expresar las *relaciones* entre los términos En esto lo siguieron los lógicos tradicionales En consecuencia, éstos no compren dieron que "R antecede a S", "R ama a S", "Toda R es S" expresan formas diferentes No intentaron analizar estas relaciones a fin de determinar sus propiedades lógicas, sino que se contentaron con tomar la similitud de la forma gramatical como una guía para la similitud de la forma lógica De tal suerte, los seguidores de Aristóteles con finaron rígidamente la deducción a la forma del silogismo subsuntivo, con lo cual no sólo desperdiciaron su tiempo en la elaboración de tri vialidades técnicas, sino que además —y ello es más importante aún— frenaron el desarrollo de la lógica El no analizar las relaciones im plicadas en los diferentes tipos del razonamiento deductivo impidió a la lógica "desarrollar símbolos" para exhibir la forma

§ 2 *Las relaciones*

Toda deducción depende de las propiedades lógicas de las relaciones Por lo tanto, el concepto de *relación* tiene una importancia funda mental No parece posible definir la *relación* sin presuponer nociones cuya necesidad de definición no es menor Todo lo que está a nuestro alcance es hacer algunas observaciones que nos ayudarán a compren der qué es exactamente una relación Cualquier objeto sobre el cual podamos pensar posee características que nos permiten distinguirlo de otros objetos Estas características son de dos clases: *cualidades* y *relaciones* La diferencia entre ellas no puede ser definida, puesto que tanto la cualidad como la relación son indefinibles [4] Por una cualidad entendemos lo que algunas veces recibe el nombre de *cualidad simple*, como las que ordinariamente se expresarían mediante un adjetivo, por ejemplo: *rojo, dulce, ruidoso* Desde el punto de vista del sentido común podemos decir que si es verdad que A *es rojo*, entonces puede considerarse que A posee la cualidad de *ser rojo* in dependientemente de cualquier referencia a cualquier otro objeto [5]

[4] W E JOHNSON dice: "Una *relación* se define adecuadamente como un '*adjetivo transitivo*', distinguiéndose el adjetivo ordinario como *intransitivo*" (*Logic*, I, p 204 *n*) Esta definición descansa sobre una concepción de la relación y el adjetivo que no me parece iluminadora Más aún, "transitivo" contiene la noción de *relación* El uso que hace Johnson de "adjetivo" es sumamente desorientador

[5] Es posible, y quizá necesario, considerar *rojo* como un término en una relación múltiple irreductible Pero la comprensión de tal noción presupone que sepamos qué *significa* la afirmación de que *rojo* es una cualidad no relacional

Por *una relación* entendemos una característica que pertenece a A considerada con referencia a algún otro objeto B Este enunciado no puede considerarse como una definición de "relación", puesto que la frase "considerada con referencia a" repite el concepto de relación Con todo, la afirmación puede ser útil puesto que sugiere que A no puede tener una relación a menos que haya algún otro objeto *con* el cual tiene la relación Por ejemplo, si A *tiene un padre,* entonces debe de haber algún término del mismo tipo que A que sea el padre de A Así, pues, *tener un padre* es una característica relacional que pertenece a A Supongamos que este término es X, entonces la relación *padre de* rige entre X y A Asimismo, afirmar la *igualdad* de algún término K es afirmar que K puede ser considerada con referencia a algún otro término, del mismo tipo que K en algún aspecto, que es igual a K Si este término es L, entonces "K equivale a L" expresa una relación que rige entre K y L Afirmar que *D es un regalo* es afirmar que hay dos términos tales que uno, digamos X, tiene la característica de *regalar* D, y el otro, digamos Y, tiene la característica de *recibir* D Entonces, "X regala D a Y" expresa una relación de *regalar* que rige entre X, D e Y Afirmar que *se deben $ 5 00* es afirmar que hay otros tres términos tales que uno, digamos A, tiene la característica de *deber*; otro, digamos B, tiene la característica de *ser debido*; y un tercero, digamos X, tiene la característica de *ser aquello por lo cual* se debe algo Entonces, "A le debe $ 5 00 a B por X" expresa una relación de *deber*

Todos éstos son ejemplos de relaciones perfectamente familiares y de uso común en la vida ordinaria Estas relaciones difieren en el número de *términos* comprendidos Un término es cualquier cosa que pueda tener una cualidad o guardar una relación Tanto las cualidades como las relaciones son *universales* Los términos que ocurren como A ocurre en A *es rojo*, o como A y B ocurren en A *ama a* B, son *particulares* o *individuos* Estos términos no pueden ocurrir como *es rojo* ocurre en A *es rojo*, o como *ama a* ocurre en A *ama a* B Los constituyentes como *es rojo, ama a,* son universales [6] Toda proposición contiene un constituyente que funciona como *ama a* funciona en A *ama a* B, o sea, que combina los constituyentes en la unidad de una proposición simple Los constituyentes así combinados no tienen que ser particulares, por ejemplo: "El odio es análogo al amor" Sin embargo, el universal que relaciona no ocurre como ocurren *amor* y *odio* Ya hemos distinguido las relaciones según el número de términos implicados, a saber, diádicas, triádicas, tetrádicas, pentádicas, poliádicas Simbolizaremos una relación diádica *ya sea* mediante x R y, o mediante R(x, y), las relaciones con más de dos términos serán simbolizadas mediante R(x, y, z); R(v, x, y, z), y así sucesivamente Simbolizamos la relación en la que y representa a x, cuando x R y, mediante $\breve{R}$, es decir, y $\breve{R}$ x Estamos acostumbrados a las conversas

[6] *Cf* capítulo IV

de las proposiciones, de manera que la concepción de la conversa de una relación no ofrece dificultad. El sistema de las relaciones fami liares constituye el ejemplo más familiar de relaciones del que podemos derivar inferencias fácilmente Dado cualquier árbol genealógico, diga mos el de *La Casa de Hanover*, podemos establecer inmediatamente el grado preciso de parentesco que, digamos, la actual Duquesa de York guarda con Jorge I

La gran importancia de las relaciones en la teoría deductiva se debe al hecho de que poseen determinadas propiedades *formales*, es decir, *puramente lógicas*, que se encuentran en la base de toda inferencia Las relaciones se pueden clasificar de acuerdo con sus propiedades lógicas Comenzaremos con algunas definiciones que resultarán útiles en la enunciación de esas propiedades:

Referente y relato Toda relación tiene un *sentido*, es decir, una *dirección* en la cual va Por ejemplo, *ama a* va *de* el *amante a* el *amado*, *padre de* va *de* el *progenitor masculino a* el *hijo* El término *del* cual va la relación es el *referente*; el término *al* cual va la relación es el *relato* En A *ama a* B, A es el referente y B el relato

Dominio, dominio converso, campo Si R es una relación cualquiera, entonces el *dominio de* R es la clase de términos que tienen R respecto de algo El *dominio converso* de R es la clase de términos respecto de los cuales algo tiene R El *campo de* R es la suma del dominio y del dominio converso de R Así, pues, todos los posibles referentes de R son el dominio de R, todos los posibles relatos son su dominio converso El dominio y el dominio converso pueden intersectarse Por ejemplo, si los descendientes directos de Jorge I de Inglaterra son tomados como el campo de la relación *antepasado de* (limitada a este campo), entonces el dominio es la clase de todos aquellos individuos que tienen descendientes, el dominio converso es la clase de sus descendientes El individuo *Victoria* es referente res pecto de Eduardo VII, Jorge V, etcétera, y es relato respecto del *Duque de Kent*, Jorge II, etcétera

Ahora consideraremos aquellas propiedades de relaciones que son importantes para la inferencia

Simetría Una relación R es *simétrica* cuando $R \doteq \breve{R}$ Así, pues, si x R y, entonces y R x Por ejemplo, *primo de, cónyuge de, igual a, diferente de, hermano o hermana de*

Una relación R es *asimétrica* cuando R es incompatible con $\breve{R}$ Así, pues, si x R y, entonces no y R x Por ejemplo, *padre de, esposa de, antes que, más oscuro que, mayor que*

Una relación R es *no-simétrica* cuando R es incompatible con $\breve{R}$ Así, incompatible con $\breve{R}$ Por ejemplo, *implicación, ama a, hermana de*

Transitividad La propiedad de la transitividad es una propiedad de *pares* de términos con referencia a alguna relación R.

Una relación R es *transitiva* cuando es de tal índole que si x R y, e y R z, entonces x R z Por ejemplo, *antecede a, antepasado de, igual a, exactamente contemporáneo de*

Una relación R es *intransitiva* cuando es de tal índole que si *x* R *y* e *y* R *z*, entonces nunca *x* R *z* Por ejemplo, *siguiente a*, *cónyuge de*, *padre de*, *contradictorio*

Una relación R es *no-transitiva* cuando es de tal índole que si *x* R *y* e *y* R *z*, entonces algunas veces *x* R *z*, algunas veces no *x* R *z* Por ejemplo, *hermana de*, *intersectada en el tiempo con*, *engañar*, *amigo de*, *diferente de*

Las propiedades de la simetría y la transitividad, y sus contrarias, son independientes Por lo tanto, si R fuese cualquier relación, R podría ser (i) transitiva y simétrica, (ii) transitiva y asimétrica, (iii) intransitiva y simétrica; (iv) intransitiva y asimétrica Las relaciones que son al mismo tiempo transitivas y simétricas tienen las propiedades formales de la *igualdad* Hay una tercera propiedad importante que que pertenece a esas relaciones Esta propiedad ha recibido el nombre de *reflexividad* [7] Se la puede definir de la siguiente manera Una relación es *reflexiva* cuando rige entre un término y ella misma La relación de *identidad* es reflexiva Si *x* es cualquier término, entonces *x* es idéntico a *x* Una relación puede ser simétrica sin ser *reflexiva*, por ejemplo: *cónyuge de* Russell ha señalado que la única relación de la que puede decirse que es reflexiva sin limitación es la relación de *identidad* Las propiedades de *reflexividad*, *simetría* y *transitividad* son las propiedades formales que pertenecen a las relaciones de *identidad* e *igualdad* Cualesquiera relaciones que tengan esas propiedades son de la naturaleza formal de la identidad, por ejemplo *coimplicación* y *coincidencia* [8]

Una relación que tiene tanto las propiedades de la transitividad como de la asimetría, tiene también una tercera propiedad, a la cual C S Peirce ha dado el nombre de *aliorrelativa* Se la puede definir de la siguiente manera Una relación R es *aliorrelativa* cuando es de tal índole que ningún término tiene R para sí mismo, por ejemplo *mayor que*, *sucesor de* Es obvio que las relaciones asimétricas son siempre aliorrelativas, pero, como acabamos de ver la conversa no siempre está en este caso, puesto que *cónyuge de* es simétrica y también aliorrelativa Pero si una relación es *tanto* transitiva *cuanto* aliorrelativa, *también* es asimétrica Russel ha introducido las frases "contenida en la diversidad" o "implicante de diversidad" como sinónimos de "aliorrelativa" [9]

Conexidad Dados cualquier relación R y el campo de R, no se desprende que cualesquiera dos términos del campo estén relacionados ya sea por R o por $\breve{R}$ Por ejemplo, dada la relación *progenitor de* y el campo *seres humanos*, no se desprende que de cualesquiera dos términos, uno deba ser progenitor del otro Pero cuando esto sí se desprende, se dice que la relación está conectada La conexidad puede definirse de la siguiente manera: Una relación R está *conectada*

[7] PEANO, *Revue du Mathématiques*, VII, p 22
[8] *Cf* RUSSELL, *Principles of mathematics*, § 209
[9] Véase *Int math phil*, p 32

cuando, dados cualesquiera dos términos de su campo, digamos x e y, entonces o bien x R y o bien y R x (o sea, o bien x R y o bien x R̆ y) Una relación que sea transitiva, asimétrica y conectada, es una *relación serial* Por ejemplo, la relación *mayor que*, limitada al campo *números naturales*, está conectada, puesto que de cualesquiera dos números, uno es mayor que el otro La relación *mayor que* es asimétrica y transitiva Basta para generar la serie 1, 2, 3, 4 Las tres propiedades de la asimetría, la transitividad y la conexidad son independientes, puesto que una relación puede tener cualesquiera dos de ellas sin la tercera

Podemos obtener otra clasificación independiente de las relaciones diádicas, basada en el número de términos con los cuales un término dado puede guardar la relación R. Será más fácil ver esto en el caso de los ejemplos familiares de relaciones Si A es padre de B, puede haber muchos otros términos además de B con los cuales A guarde la misma relación Si A es gemelo de B, no hay ningún otro término con el cual A guarde la misma relación Si A es sirviente de B, puede haber otros términos además de A con los cuales B guarde la misma relación Si A ama a B, puede haber otros términos además de A que guarden la misma relación con B, y puede haber otros términos además de B que guarden la misma relación con A Por lo tanto, distinguiremos cuatro clases de relaciones, definidas de la siguiente manera

(1) *Muchos-muchos* La relación R puede ser tal que si x R y, entonces también puede haber m R y, n R y y también x R b, x R c Por ejemplo *1º de latitud norte de*, *súbditos de Emperadores*

(2) *Muchos-uno* La relación R puede ser tal que, cuando el referente es dado, el relato es determinado, pero puede haber muchos referentes Tal relación es *muchos-uno* Por ejemplo: *sirviente de la Reina Isabel*, *esposa del Sultán*

(3) *Uno-muchos* Una relación uno-muchos es la conversa de una relación muchos-uno, por ejemplo: *soberano de* es una relación uno muchos, *súbdito de* es una relación muchos-uno

(4) *Uno-uno* Una relación R puede ser tal que la selección del referente determine únicamente la selección del relato, y conversamente Puede haber muchos miembros del dominio de R y muchos miembros del dominio converso, pero la selección de un término dado (ya sea referente o relato) determina cuál término debe ser seleccionado para guardar la relación R (ya sea como relato o como referente) Por ejemplo, *hijo mayor de un padre*, *casado con un cónyuge* Las relaciones uno-uno pueden ser consideradas como un caso especial de relaciones uno-muchos Son sumamente importantes en las ciencias exactas Las correlaciones son relaciones uno uno Se re

cordará que el contaje es un proceso de establecer una relación de uno-uno entre un conjunto de objetos y los numerales [10]

Las descripciones definidas entrañan relaciones uno-muchos, por ejemplo: "El padre de Oliver Cromwell", "El maestro de Sócrates", "El Hombre con la Máscara de Hierro", "El autor de *Waverley*" Cada una de estas descripciones implica que hay un término y sólo uno que es referente de la relación Así, Oliver Cromwell sólo pudo tener un padre, pero su padre pudo tener muchos hijos Si, empero, hay un solo relato, entonces la relación es uno-uno Así, las relaciones uno-uno son un caso especial de las relaciones uno-muchos, por ejemplo: "El autor de *Waverley*", "El Hombre con la Máscara de Hierro" Debe observarse que la relación de *objeto* a *descripción* no es uno-uno, puesto que hay muchas descripciones conectas del mismo objeto, por ejemplo: "El personaje principal en el diálogo platónico *La República*", "El filósofo que bebió la cicuta", "El marido de Xantipa" describen todas ellas a *Sócrates* La relación *progenitor de* no es una relación uno-muchos, puesto que, si x es progenitor de y, entonces x puede ser o padre o madre de y, de suerte que los dos términos guardan la misma relación con y Si, empero, los referentes están limitados a los *varones*, entonces la relación es uno-muchos; si el relato está ahora limitado al *hijo mayor*, la relación es uno uno Debe observarse que las funciones matemáticas son resultado de relaciones uno-muchos, por ejemplo: el coseno de x, el logaritmo de y

Tenemos que considerar ahora la combinación de dos relaciones Supóngase que hay una relación R tal que x R y, y una relación S tal que y S z, entonces hay una relación entre x y z compuesta de las dos relaciones R y S Tal modo de combinación recibe el nombre de *multiplicación relativa*, y la relación así obtenida recibe el nombre de *producto relativo* de R y S Podemos dar la siguiente definición: Dadas cualesquiera dos relaciones R y S y un término y tal que x R y e y S z, entonces la relación que rige entre x y z es el producto relativo de R y S Russell simboliza el producto relativo de R y S mediante R | S R y S son llamados los factores de su producto relativo El producto relativo de *hermana de* y *padre de* es *tía paterna* Si el orden de los factores se invierte, puede obtenerse una relación diferente Es decir, que el producto relativo no es, como tal, conmutativo

[10] Estas relaciones podían definirse de la siguiente manera:

(1) R es *muchos muchos* cuando tanto el dominio como el dominio converso contienen más de un miembro y la selección de un término de cualquiera de ellos no determina la selección del otro término

(2) R es *muchos uno* cuando la selección de un término del dominio determina la selección del término del dominio converso, pero no a la inversa

(3) R es *uno muchos* cuando la selección de un término del dominio converso determina la selección del término del dominio, pero no a la inversa

(4) R es *uno uno* cuando tanto R como $\breve{R}$ son uno muchos

Por ejemplo, si invertimos el orden de los factores dados arriba, obtenemos *padre de*, que es el producto relativo de *padre de* y *hermana de* La conversa de un producto relativo se obtiene mediante la inversión del orden de los factores y la sustitución ulterior de sus conversas O sea, $(\overline{R|S}) = \breve{S} | \breve{R}$ Por ejemplo, la conversa del producto relativo de *marido de* y *nuera*, es *padre* o *madre de*

Cuadrado de una relación El producto relativo de R y R es el cuadrado de R Es decir, $R | R = R^2$ Por ejemplo, el producto relativo de *padre* y *padre* es *abuelo paterno* La conversa del cuadrado de padre es *hijo del hijo* El cuadrado de *antepasado* es *antepasado*

Contener o ser implicado por Una relación R contiene, o es implicada por, una relación S cuando es de tal índole que si S rige, R rige Puede observarse que una relación transitiva contiene su cuadrado y que el cuadrado de una relación transitiva aliorrelativa es asimétrico

Hasta ahora nos hemos ocupado solamente en las relaciones diádicas Es posible clasificar las relaciones triádicas, tetrádicas y otras relaciones poliádicas de acuerdo con las definiciones que hemos dado, siempre y cuando se hagan modificaciones adecuadas No podemos, sin embargo, examinar esas definiciones aquí Debe bastar con señalar que R (*a*, *b*, *c*, *d*) será simétrica si el orden de los términos puede ser cambiado sin alterar la relación R, es decir, R (*a*, *b*, *c*, *d*) = R (*b*, *c*, *d*, *a*), etcétera Éste sería el caso de *ser puntos en la misma línea recta*, siempre que no esté envuelta ninguna *otra* relación R (*a*, *b*, *c*, *d*) sería no-simétrica si el intercambio de los términos implicara una alteración en R, por ejemplo "*a* le pagó a *b* $ 2 00 como salario por una semana"

La *transitividad*, en el caso de las relaciones poliádicas, es reemplazada por la *eliminación* En la siguiente sección trataremos esta propiedad

§ 3 *Las propiedades lógicas de las relaciones deductivas*

Es conveniente distinguir desde un principio tres formas de deducción, todas las cuales han sido consideradas algunas veces como reductibles en última instancia a forma silogística, con o sin la adición de otra premisa Éstas son (1) el silogismo implicacional, (2) el silogismo subsuntivo, (3) la forma *a fortiori* El silogismo categórico tradicional es subsuntivo El silogismo implicacional es conocido tradicionalmente como el "silogismo hipotético puro"

Estas tres formas pueden ser expresadas de la siguiente manera:

(1) Usando *p*, *q*, *r* para representar proposiciones

Si *p* implica a *q*
y *q* implica a *r*,
entonces *p* implica a *r*

(2) Usando α, β, γ paia representar clases y X un individuo

Hay dos formas del silogismo categórico tradicional, sólo una de las cuales es subsuntiva

(i) Si α está incluida en β y β está incluida en γ, entonces α está incluida en γ	(ii) Si α está incluida en β y x es una α, entonces x es una β

(3) La foima ielacional (de la cual la *a foitioi i* es un caso especial) será expresada mediante dos ejemplos

(i) Si A = B y B = C, entonces A = C	(ii) Si A es más caliente que B y B es más caliente que C, entonces A es más caliente que C

Ahoia tenemos que indagai cuáles son las propiedades lógicas de las relaciones conectivas en cada uno de estos casos

Implica a tiene las propiedades reflexiva, no-simétrica, transitiva

Igual a tiene las propiedades ieflexiva, simétiica, transitiva

Está incluida en, más caliente que tienen las propiedades asimétrica,[11] tiansitiva

Con la excepción de 2 (ii), la ielación conectiva en cada una de estas formas es *tiansitiva* De esta piopiedad de transitividad depende la deducción En cada uno de estos casos la conclusión establece una relación entie el primero y el tercero de ties términos, el segundo término en cada caso guarda la relación dada con uno de los términos, y en la ielación conveisa con el otio téimino [12] Puesto que la relación es transitiva, el téimino intermedio puede ser eliminado Esta propiedad es, por lo tanto, de gran impoitancia en la deducción. Siempre que las premisas están conectadas por relaciones transitivas, son posibles las *cadenas de deducción* Dado que las premisas sean veidaderas, entonces el téimino o términos inmediatos pueden ser eliminados y la conclusión puede sei afiimada No hay la mínima razón paia limitai el número de téiminos intermedios a uno, como hacen los lógicos tradicionales William James ha expresado gráficamente el principio en virtud del cual tal eliminación es posible, como el "axioma de los intermediarios omitidos" Dice James "Simbólicamente, podríamos esciibiilo como $a < b < c < d$ y decii que cualquier número de intermediarios puede ser cancelado sin obligarnos a alteiai nada en lo que permanece esciito" [13] De acueido con este piincipio, se obtiene la conclusión de un *Soiites*,

[11] Más adelante veremos que es posible interpretar la relación de *inclusión* como no simétrica

[12] En el caso de la relación *equivale* a $xRy = yRx$

[13] *Piinciples of psychology*, vol II, p 646

y que se elimina el término medio en un silogismo subsuntivo tra dicional [14] Por lo tanto, es totalmente innecesario fragmentar un *Sorites* en una serie de silogismos de tres términos

Tenemos que considerar ahora la forma *Si* α *está incluida en* β *y X es una* α, *entonces X es una* β La relación expresada por *es una* α fue confundida por los lógicos tradicionales con la relación de *sub sumisión* o *inclusión* Pero ya hemos visto que la relación que un individuo guarda con la clase de la que es un miembro, es totalmente diferente de la relación de inclusión entre las clases Peano simbolizó esta relación por medio de ε Así, "X ε α" debe leerse como "X es un miembro de la clase α", o, más brevemente, "X es una α" La relación ε es no-transitiva Considerando esta relación como indefinible, vemos que todo lo que puede afirmarse de todo miembro de una clase, puede afirmarse de *cualquier* miembro *especificado* Éste es un principio fundamental de la inferencia, llamado por Johnson el *principio aplicativo* [15] Permite la sustitución de un individuo definido dado, en lugar de una variable Si expresamos 2 (ii) en la forma *Si todo miembro de* α *es un miembro de* β *y X es un miembro de* α, *entonces x es un miembro de* β, vemos que la validez de esta forma descansa sobre este principio [16] Es claramente diferente de 2 (i), con el que se le ha confundido tradicionalmente

Vemos, entonces, que el silogismo subsuntivo es un ejemplo sim ple de la posibilidad de eliminación de los intermediarios conectados por una relación transitiva Al no lograr aprehender la naturaleza e importancia de la propiedad lógica de la transitividad, los lógicos tradicionales no pudieron aprehender la característica en virtud de la cual era posible tal deducción No lograron ver, en consecuencia, que el llamado argumento *a fortiori* es válido en virtud de la característica que confiere validez al silogismo subsuntivo, aunque aquél no pueda ser convertido a la forma subsuntiva Por la misma razón, se conten taron con hacer descansar toda deducción en el *dictum de omni* aris totélico, y se vieron así llevados a su absurda limitación de la deduc ción a una sola forma

§ 4 *La construcción de un sistema deductivo* [17]

Un sistema consiste en elementos que guardan ciertas relaciones Por ejemplo, el sistema solar es un sistema que consiste en determinados

[14] La propiedad de *transitividad*, tal como la hemos definido para las relaciones diádicas, es sólo un caso especial de las condiciones que hacen posible la eliminación en general (Véase BOOLE, *Laws of thought*, capítulo VIII; *cf* también J N KEYNES, *F L*, §§ 489 94)

[15] *Logic*, II, p 10

[16] En el desarrollo de un sistema lógico, la *sustitución* desempeña un papel fundamental *Cf* § 4 más adelante

[17] Para una concepción diferente de la naturaleza de los sistemas deduc tivos, el estudiante debe consultar el Apéndice C