Seleccionamos del universo todos los individuos *excepto los políticos* La clase resultante es la clase de todos aquellos que *no son políticos*

Estos modos familiares de combinación entrañan *conjunciones lógicas* Éstas pueden resumirse de la siguiente manera: usando α, β para representar *cualesquiera* clases

(i) La clase *sin* α, es decir, no-α, simbolizada por $\bar{\alpha}$

(ii) La clase α *y* β, es decir, $\alpha\beta$

(iii) La clase α *o* β

Existen analogías obvias entre estas operaciones sobre las clases y las operaciones matemáticas de la *sustracción*, la *multiplicación* y la *adición* La operación de seleccionar la clase *sin* α es análoga a la sustracción La operación que produce α *o* β es análoga a la adición, por lo tanto, la clase resultante es llamada la suma lógica de α y β [32] La operación que produce $\alpha\beta$ es análoga a la multiplicación; por lo tanto, la clase resultante es llamada el *producto lógico* de α y β

Puesto que α, β han de representar *cualesquiera* clases, y puesto que uno de nuestros supuestos fundamentales es que cualquier combinación de α con β produce una clase, se desprende que $\alpha\beta$, $\alpha+\beta$; deben ser clases, no importa qué miembros tenga α o tenga β Supóngase, por ejemplo, que α es la clase de los *hidalgos* y β la clase de los *basureros*, entonces $\alpha\beta$ es la clase de los *hidalgos basureros* Pero no hay ningún individuo que sea al mismo tiempo hidalgo y basurero; por lo tanto, los *hidalgos basureros* son una clase que no tiene miembros De una clase así se dice que es vacía; se le da el nombre de *clase nula* Podría objetarse que el que no haya hidalgos que sean basureros es una característica accidental del mundo hasta nuestros días, y que una revolución gilbertiana podría darle miembros a esta clase Sería fácil, sin embargo, encontrar ejemplos a los que no se les podría oponer esa objeción Por ejemplo, la clase de los *cuadrados* no tiene miembros en común con la clase de los *círculos*, por lo tanto, su producto lógico, *círculos cuadrados*, es una clase vacía; es la clase nula La clase nula es simbolizada por 0

La clase de los *círculos* combinada por la conjunción disyuntiva o con los hidalgos basureros, produce la clase *círculos o hidalgos basureros* Esto es lo mismo que la clase de los *círculos*, puesto que la clase de los *hidalgos basureros* no tiene miembros; así, la clase que

[32] Pero, puesto que "o" no ha de interpretarse *exclusivamente*, la analogía con la adición matemática no es exacta No hay operación inversa de *sustraer* β de α, puesto que α y β pueden tener miembros comunes Más aún, α o α produce α El análogo propio de la sustracción es la selección de α *del universo*, lo cual nos deja la clase no α. De consiguiente, esto se simboliza a veces con "— α", pero actualmente por lo general se escribe $\bar{\alpha}$ En el sistema de Boole, "o" se interpreta exclusivamente, y es así un inverso propio de la sustracción

consiste en todos y cada uno de los miembros de *círculos*, junto con todos y cada uno de los miembros de *hidalgos basureros*, es la clase de los círculos

La clase de los *círculos* combinada por la conjunción copulativa *y* con la clase de los *círculos cuadrados*, es la clase nula, puesto que la clase que consiste en todos y cada uno de los individuos que son *un círculo y un círculo cuadrado al mismo tiempo* no tiene miembros

Estos resultados pueden ser expresados dándoles a los símbolos $+$ y $\times$ las interpretaciones matemáticas ordinarias, en forma generalizada, con α representando cualquier clase que no sea vacía y 0 la clase nula

(i) $\alpha + 0 \doteq \alpha$

(ii) $\alpha \times 0 \doteq 0$

O sea (i) Lo que es o bien α o bien nada, es α

(ii) Lo que es α y nada al mismo tiempo, es nada

Ahora introducimos la relación *está incluida en*, que por el momento consideraremos indefinida Con su ayuda podemos dar una definición precisa de la suma lógica y del producto lógico de cualesquiera dos clases

El *producto lógico* de dos clases es la clase incluida en cada una y que incluye a toda clase incluida en ambas

La *suma lógica* de dos clases es la clase que incluye a cada una y que está incluida en toda clase que incluye a ambas

De la definición de la suma lógica se desprende que la clase nula está incluida en la clase α, sea lo que fuere α Es decir, que la clase nula está incluida en toda clase Este resultado no es familiar, y por lo tanto puede parecer absurdo. Pero es una consecuencia del hecho de que estamos interpretando las clases *extensionalmente* Por ejemplo, por la clase de los *basureros* significamos *aquellos individuos que son basureros*; no significamos lo que algunas veces se llama el *concepto-clase basurero* Puesto que la clase nula —o sea, *la clase sin miembros*— es considerada extensionalmente, se desprende que hay sólo *una* clase nula

La relación *está incluida en* es transitiva y no-simétrica, puesto que, si α está incluida en β, no se desprende que haya ningún miembro de β que no sea α En otras palabras, α y β pueden ser coextensivas o pueden no serlo Será conveniente simbolizar *está incluida en* mediante $<$ Entonces los resultados que hemos obtenido respecto de la *clase nula* —es decir, la clase que no tiene miembros— y *el universo* —o sea, la clase de todos los miembros posibles de cualquier clase— pueden resumirse de la siguiente manera:

1 $0 < \alpha$, o sea, la clase nula está incluida en toda clase.

2 $0 < 0$, o sea, la clase nula está incluida en la clase nula

3 $\alpha < 1$, o sea, cualquier clase está incluida en el universo

4 $1 < 1$, o sea, el universo está incluido en el universo

La combinación de proposiciones puede efectuarse de una manera análoga a la combinación de clases Empezaremos nuevamente con ejemplos familiares de combinación, y después consideraremos si es posible definir algunos de estos modos de combinación en términos de otros modos [33]

Comenzaremos con los conceptos no analizados de: (i) una proposición, (ii) afirmación de una proposición

Formulamos los siguientes supuestos:

(1) Cualquier proposición puede ser afirmada [34]

(2) Las proposiciones pueden ser combinadas

(3) Cualquier combinación de proposiciones es una proposición

Hay una relación familiar *no* por medio de la cual, de una proposición dada p podemos obtener otra proposición *no-p* La proposición *no-p* será llamada la contradictoria de p [35]

Tres modos de combinar dos o más proposiciones son familiares, a saber, los modos de combinar por medio de las relaciones lógicas *y*, *o*, *implica* Así, dadas cualesquiera dos proposiciones, hay una tercera proposición que consiste en su afirmación simultánea, es decir, la afirmación de las dos juntas Esta proposición se deriva de la combinación de p, q por medio de la conjunción copulativa *y*, lo cual produce p *y* q La afirmación simultánea de p y q puede carecer de significado de una manera análoga al producto lógico de dos clases, que produce la clase nula Asimismo, dadas dos o más proposiciones, hay una tercera que consiste en su afirmación alternativa Esta proposición se deriva combinando p, q mediante *o*, que produce la proposición individual p *o* q Asimismo, dadas dos o más proposiciones, hay una tercera proposición que afirma que una de estas proposiciones implica la otra Es decir, que dada cualquier proposición p, hay otra proposición q tal que p *implica* q

Estos modos de combinación son llamados *funciones* de las proposiciones así combinadas, y la derivación de una proposición por medio

[33] Debe recordarse que, al seguir este modo de procedimiento, nuestro propósito no es *construir* un sistema deductivo, sino exhibir la manera en que podría sugerirse la posibilidad de construir tal sistema Por esta razón empezamos con lo que es *obvio*, no con lo que es lógicamente *simple*, y entonces procedemos a *enunciar* principios formales sin intentar la prueba precisa

[34] Decir "p es afirmada" equivale a "p es verdadera"

[35] Negar p equivale a "p es falsa"

de *no* es llamada una función de la proposición original Ahora podemos resumir estas cuatro funciones, añadiendo nombres y símbolos apropiados [36]

Relación lógica	*Función*	*Simbolizada por*
(1) No	negación o contradicción	$\sim p$
(2) o	adición o disyunción	$p \vee q$
(3) y	multiplicación o conjunción	$p \cdot q$
(4) implica	implicación	$p \supset q$

No es necesario considerar todos los modos de combinación como modos *indefinidos* Dada la *negación*, podemos definir la *disyunción* si suponemos la conjunción, a la inversa, podemos definir la *conjunción* si suponemos la disyunción; finalmente, podemos definir la *implicación* si suponemos la conjunción o la disyunción

(I) Comenzamos considerando la *disyunción como indefinida* y definimos a (3) y a (4) en términos de negación y disyunción

$$\text{(i)}\quad p\ q = \sim(\sim p \vee \sim q)\ Df$$

Esto puede leerse como " 'es falso que o bien *p* es falsa o bien *q* es falsa' sea la equivalente definida de '*p* y *q*' "

$$\text{(ii)}\quad p \supset q = \sim p \vee q\ Df$$

Esto puede leerse como: " '*p* implica *q*' es la equivalente definida de 'o bien *p* es falsa o bien *q* es verdadera' "

(II) Considerando la *conjunción como indefinida*, definimos a (2) y a (4) en términos de negación y conjunción

$$(a)\quad p \vee q = \sim(\sim p\ \sim q)\ Df$$

Esto puede leerse como: " '*p* o *q*' es la equivalente definida de 'es de 'es falso que *p* sea verdadera y *q* sea falsa' "

$$(b)\quad p \supset q = \sim(p\ \sim q)\ Df$$

Esto puede leerse como: " '*p* implica *q*' es la equivalente definida de 'es falso que *p* sea verdadera y *q* sea falsa' "

Puesto que cualquier proposición puede ser verdadera o puede ser

[36] Nosotros utilizamos el simbolismo de *Principia mathematica*, pero debe observarse que podríamos usar + para disyunción, × para conjunción, y por lo tanto los nombres "adición", "multiplicación" El modo *disyuntivo* de combinación es lo que hemos llamado en el capítulo VII la "forma *alternativa*" Es muy deplorable que el nombre "disyunción" haya ganado la preferencia de los lógicos simbólicos

falsa, hay cuatro posibilidades respecto de la verdad o la falsedad de p y q. Estas posibilidades son:

(1)	p verdadera	q verdarera.
(2)	p verdadera	q falsa
(3)	p falsa	q verdarera
(4)	p falsa	q falsa

Cualquier modo de combinación debe excluir cuando menos una de estas cuatro posibilidades Vemos que

$p \quad q$ excluye a (2), (3), (4);
$p \vee q$ excluye a (4);
$p \supset q$ excluye a (2)

Se descubre que es simbólicamente conveniente tomar la negación y la *disyunción*, no la negación y la *conjunción*, como los conceptos indefinidos Más adelante trataremos las consecuencias de la definición I (ii) Ésta debe ser contrastada con II (b).

A la conjunción de dos (o más) proposiciones se le llama *producto lógico* de las proposiciones en cuestión; las proposiciones así conjuntadas pueden ser llamadas *factores* de la operación de multiplicación Puede haber cualquier número de factores.

A la disyunción, o alternación, de dos (o más) proposiciones se le llama *suma lógica* de las proposiciones en cuestión; las proposiciones así disyuntadas pueden ser llamadas *sumandos* en la operación de adición Puede haber cualquier número de sumandos

El producto lógico de las dos proposiciones es su afirmación *simultánea*, o sea, *ambas son verdaderas* Esto puede definirse, análogamente a la definición del producto lógico de dos clases, de la siguiente manera *El producto lógico* de dos proposiciones es una proposición que implica y es implicada por toda proposición que implica a ambas

La suma lógica de dos proposiciones es su afirmación *alternativa*, o sea, *cuando menos una es verdadera* Esto puede definirse, análogamente a la definición de la suma lógica de dos clases, de la siguiente manera: *La suma lógica* de dos proposiciones es la proposición implicada por cada una de ellas y que implica toda proposición implicada por ambas

Ahora enunciaremos ciertos principios formales que rigen tanto en lo que se refiere a la relación entre las clases como a la relación entre las proposiciones Utilizaremos un símbolo indefinido $—\!\!<$ que puede ser interpretado ya sea como como "implica", en cuyo caso los elementos relacionados serán proposiciones, o como "está incluida en", en cuyo caso los elementos relacionados serán clases Estos elementos serán simbolizados por A, B, C, que representan indiferentemente clases o proposiciones Cuando deseemos subrayar una interpretación más bien que la otra, emplearemos α, β, γ para la primera, y p, q, r para la segunda, como hicimos anteriormente Simbolizaremos los productos lógicos mediante simples yuxtaposiciones de los elementos, es decir, "AB" representa "Ambas A y B"; simbolizaremos la suma lógica mediante + Simbolizaremos la negación mediante una raya sobre la letra, es decir, "$\bar{A}$" representa "no-A" Donde sea conveniente, usaremos paréntesis para mostrar que dos o más elementos deben ser tomados como un solo elemento compuesto, por ejemplo "$(A+B)$" muestra que la suma lógica de A y B debe ser considerada como un solo elemento La negación de un elemento compuesto como ése será expresada por una raya sobre el paréntesis, por ejemplo: $(\overline{A+B})$

Algunas veces se advertirá que es conveniente expresar estos principios como *igualdades* La igualdad puede ser definida de la siguiente manera:

$$A = B \;=\; (A \mathrel{-\!\!<} B)\,(B \mathrel{-\!\!<} A)\ \mathrm{Df}$$

Debe observarse que en la interpretación proposicional el símbolo de igualdad "=" es reemplazado por el símbolo de equivalencia lógica "≡" [37]

PRINCIPIOS FORMALES

1 *Principio de la identidad*

$$A \mathrel{-\!\!<} A$$

2 *Principio de la conmutación*

(i) $AB \mathrel{-\!\!<} BA$

(ii) $A + B \mathrel{-\!\!<} B + A$

3 *Principio de la asociación*

(i) $(AB)C \mathrel{-\!\!<} A(CB)$

(ii) $(A+B)+C \mathrel{-\!\!<} A+(B+C)$

Debe observarse que, puesto que las definiciones de adición y multiplicación no implican ninguna determinación del orden en que han de combinarse los elementos, estas relaciones son simétricas En consecuencia, los tres susodichos principios son obvios No intentamos probarlos aquí [38]

[37] Véase capítulo VIII

[38] El estudiante que desee proseguir el examen de este tópico debe consultar a COUTURAT, *Algebra of logic*

4 *Principios de la distribución*

(i) $A(B + C) \prec AB + AC$

(ii) $AB + C \prec (A + C)(B + C)$

Este principio conecta la multiplicación con la adición Debe observarse que (ii) no rige para el álgebra ordinaria, en tanto que (i) y los tres primeros principios sí rigen [39] Así, 4 (ii) es un principio diferenciador de un cálculo lógico Como una ilustración de este principio podemos tomar las tres *clases* de *eruditos, ministros del gabinete* y *pares del reino* Entonces (i) está ejemplificado en: Todos los eruditos que son o bien ministros del gabinete, o bien pares del reino, están incluidos en la clase de aquellos que son o bien eruditos y ministros del gabinete, o bien eruditos o pares del reino También (ii) está ejemplificado en: Todos aquellos que son o bien eruditos y ministros del gabiente, o bien pares del reino, están incluidos en aquellos que son o bien eruditos o bien pares del reino, y son también ministros del gabinete o pares del reino

5 *Principio de la tautología* [40]

$AA \prec A$

La clase que consiste en *eruditos y eruditos* es claramente la misma que la clase de los eruditos

6 *Principio de la simplificación*

(i) $AB \prec A$

(ii) $A \prec A + B$

Así, $p \; q \supset p$ Es decir, el producto lógico de dos proposiciones implica cualquiera de los factores tomados individualmente Asimismo, $p \supset p \vee q$ Es decir, cualquier proposición implica la suma lógica de sí misma y cualquier otra proposición De tal suerte, siempre podemos añadir al implicado de una proposición cualquier número de alternativas sin afectar la validez de la implicación Siempre pode

[39] Hay álgebras no conmutativas para las cuales no rige el segundo principio Mientras la base de la aritmética, y por lo tanto del álgebra, se funde en nuestras intuiciones por lo que se refiere al *contaje*, las álgebras no conmutativas parecerán absurdas; del mismo modo que, mientras los axiomas geométricos se basen en nuestras intuiciones del espacio, las geometrías no euclidianas parecerán absurdas Estos principios formales son para el álgebra lo que los axiomas euclidianos para la geometría

[40] Véase W E Johnson, I, p 30 Johnson señala que el principio de la tautología (que él llama la "ley reiterativa") indica que el contenido de lo que se afirma no es afectado por ninguna *re* afirmación"

mos prescindir de una de dos (o más) proposiciones afirmadas si multáneamente y afirmar el resto Este principio permite la simpli ficación de un argumento al prescindir de una proposición que no es necesaria para un propósito dado Es fácil advertir que el principio rige cuando los elementos son clases Bastará una ilustración de (ii) La clase de la *gente inteligente* está incluida en la clase de aquellos que son *o bien inteligentes o bien socialistas*

7 *Principio de la absorción*

$$\text{(i)}\ A + AB -\!\!< A$$

$$\text{(ii)}\ A(A + B) -\!\!< A$$

Por ejemplo, (i) *Aquellos que son inteligentes o son al mismo tiempo inteligentes y socialistas* están incluidos en *aquellos que son inteligentes* (ii) *Aquellos que son musicales y también son o bien musicales o bien irritables* están incluidos en *aquellos que son musicales*

Debe observarse que "A $-\!\!<$ B" expresa una *proposición*, independientemente de lo que A y B puedan representar, puesto que $-\!\!<$ es una relación Si A y B son interpretadas como representativas de *clases*, entonces "$-\!\!<$" debe interpretarse como "está incluida en" Si A y B son interpretadas como representativas de *proposiciones*, entonces "$-\!\!<$" debe interpretarse como "implica" Los demás principios tienen que ver con implicaciones entre proposiciones relativas a inclusiones de clase, o con implicaciones entre proposiciones relativas a implicaciones Por lo tanto, en ambos casos la relación principal es una relación de implicación Por esa razón, usaremos $\supset$ para expresar estos principios, diferenciando entre la interpretación de clase y la interpretación proposicional mediante el uso de $<$ para representar "está incluido en"

8 *Principio de la composición*

$$\text{(i)}\ \alpha<\beta\ \ \alpha<\gamma\ \supset:\alpha<\beta+\gamma$$

$$p\supset q\ \ p\supset r\ \supset:p\ \supset\ q\ r$$

$$\text{(ii)}\ \beta<\alpha\ \ \gamma<\alpha\ \supset:\beta+\gamma<\alpha$$

$$p\supset q\ \ r\supset q\ \supset:p\vee r\ \supset\ q$$

Las dos formas de este principio pueden ser ilustradas, con refe rencia a las clases, de la siguiente manera: (i) Si los *pedantes* están incluidos en los *eruditos*, y los *pedantes* están incluidos en los *sabihondos*, entonces los *pedantes* están incluidos en la clase de aquellos que son a la vez *eruditos* y *sabihondos* (ii) Si *los industriosos* están incluidos en *los competentes*, y *los bien pagados* están incluidos en *los competentes*, entonces *aquellos que son o bien industriosos o bien bien pagados*, están incluidos en *los competentes*

9. *Principio de la trasposición*

$$\alpha<\beta \supset \bar{\beta}<\bar{\alpha}$$

$$p\supset q \supset \sim q \supset \sim p$$

Es fácil advertir que la contraposición descansa sobre este principio. Puesto que la implicación es recíproca, este principio podría ser enunciado como una igualdad, a saber,

$$p\supset q \equiv \sim q \supset \sim p$$

10 *Principio del silogismo*

$$\alpha<\beta \;\; \beta<\gamma \supset \alpha<\gamma$$

$$p\supset q \;\; q\supset r \supset p\supset r$$

Este principio se desprende de la transitividad de las relaciones de inclusión e implicación

11 *Principio del medio excluido*

$$p\vee\sim p$$

Esto puede leerse como "o p es verdadera o p es falsa"[41]

12 *Principio de la contradicción*

$$\sim(p \; \sim p)$$

Esto puede leerse como "p no es al mismo tiempo verdadera y falsa"

Puesto que p representa "cualquier proposición verdadera" y "$\sim p$" representa "cualquier proposición falsa", estos dos últimos principios podrían expresarse de la siguiente manera

(11) Cualquier proposición es o bien verdadera o bien falsa

(12) No cualquier proposición es al mismo tiempo verdadera y falsa

A través de la exposición de estos principios hemos considerado la *negación* como indefinida Si suponemos las nociones *verdadera* y *falsa*, la negación puede ser definida por medio de la multiplicación y la adición: Usaremos "$=1$" para simbolizar "es verdadera" y "$=0$" para simbolizar "es falsa"

[41] Este y el siguiente principio deben ser comparados con los resultados obtenidos en relación con las clases, dados anteriormente (véase pp 216 17)

Dada cualquier proposición p, entonces $\sim p$ es su negación si

$$p \sim p = 0;\ p \vee \sim p = 1$$

Es decir, la negación de p es aquella proposición $\sim p$ relacionada de tal modo con p que una de ellas debe ser falsa y la otra verdadera Así, pues, p y $\sim p$ son contradictorias Debe observarse que tanto el principio del medio excluido como el principio de la contradicción son necesarios para definir "proposiciones contradictorias" El principio de la contradicción no basta por sí solo para mostrar que p y $\sim p$ son contradictorias, podrían ser contrarias La formulación de la negación que hemos dado arriba pone de manifiesto lo que está comprendido en la negación de una proposición, pero lo hace sólo porque *verdadera* y *falsa* han sido consideradas como nociones no definidas [42]

13 *Principio de la negación doble*

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Es fácil advertir que este principio se desprende de la simetría de las relaciones de multiplicación y adición empleadas para definir la negación De esta definición podemos derivar dos fórmulas, conocidas como *las fórmulas de De Morgan*

$$\text{(i)}\ \ (\overline{A+B}) = \overline{A}\ \overline{B},$$

o sea, la negación de una suma es el producto de las negaciones de los sumandos Esto rige independientemente de que los elementos del producto y la suma sean proposiciones o clases

$$\text{(ii)}\ \ (\overline{AB}) = \overline{A} + \overline{B},$$

o sea, la negación de un producto es la suma de las negaciones de los factores Esto rige independientemente de que los elementos del producto y la suma sean proposiciones o clases

De estas fórmulas es posible derivar las negaciones de expresiones de cualquier grado de complejidad La regla general es *Para cada elemento sustitúyase su negación, y cámbiense las sumas por productos y los productos por sumas*

Dadas las definiciones de negación, adición y multiplicación, y dados los principios resultantes del medio excluido y la contradicción, podemos derivar fórmulas que expresen una división exclusiva y ex

[42] Los principios de la *identidad*, el *medio excluido* y la *contradicción* han sido considerados tradicionalmente como los únicos principios lógicos fundamentales Se trata de un completo error Esos principios no son ni más ni menos importantes que los otros que hemos enunciado (Véase más adelante, capítulo xxiv)

haustiva de cualquier número de elementos Puesto que acerca de cualquier elemento podemos afirmar A o bien afirmar $\bar{A}$, o B o $\bar{B}$, y así sucesivamente, se desprende que, dados *dos elementos*, A, B, po demos afirmar

$$1=AB+A\bar{B}+\bar{A}B+\bar{A}\bar{B}$$

Es decir: el universo contiene o bien lo que es al mismo tiempo A y B, o bien lo que es al mismo tiempo A y no B, o lo que no es A sino B, o lo que no es ni A ni B Puede qué estas alternativas no se realicen todas ellas, o sea, que cualquiera de las alternativas puede representar la clase nula Colectivamente, estas alternativas son exhaustivas, es decir, que todo en el universo debe caer dentro de uno u otro de estos conjuntos de alternativas

En la enunciación de los principios formales supusimos que "*p*" es equivalente a "*p* es verdadera", y que "$\sim p$" es equivalente a "*p* es falsa" Estos supuestos pueden expresarse de la siguiente manera, usando 1 y 0 como antes:

$$\text{(i) } p \equiv p=1 \qquad \text{(ii)} \sim p \equiv p=0$$

Los principios formales enunciados arriba en términos de implicación bastan para construir sistemas deductivos, pero no bastan para *extraer conclusiones* La transitividad de la relación de *implicación* produce el principio del silogismo, pero no produce un principio que permita la omisión del elemento implicante [43] Para asegurar esto se necesita la afirmación independiente "$p=1$", o un principio adicional al efecto de que *el implicado* de una proposición verdadera que enuncia una implicación, puede ser *afirmado* Así tenemos:

14. *Principio de la deducción*

Lo que es implicado por una proposición verdadera, es verdadero [44]

Éste es el llamado *principio de la deducción*, puesto que es en virtud de este principio exclusivamente que podemos deducir una conclusión Sin este principio, la implicación no produciría *pruebas* También podría llamársele, con igual propiedad, *principio de la afirmación*, puesto que por medio de él se nos hace posible *afirmar* una conclusión en vez de considerar meramente la conclusión tal como la implican las premisas Este principio no puede ser formulado simbólicamente. Sería un error, por ejemplo, suponer que el principio de la deducción podría formularse mediante

$$p \supset q \;\; p=1 \;\supset q=1,$$

[43] Véase capítulo XII, § 2; y *cf* la cita de Russell en la nota al calce de la p 252

[44] Véase *Principia mathematica*, p 94, p 132; *Principles of mathematics*, § 38; COUTURAT, *Encyclopaedia of the philosophical sciences*, pp 141 142

o mediante $p \supset : p \supset q : q$,

pues en ninguna de estas expresiones simbólicas se muestra que p pueda ser omitida y q afirmada sola [45] Cualquier expresión simbólica producirá solamente *una implicación* es decir, *la hipótesis* de que p es verdadera, no *la afirmación* de que p es verdadera Pero es la *afirmación* de p lo que se necesita para que podamos extraer la conclusión q de la implicación "$p \supset q$"

Otro principio no-simbólico es necesario a fin de que, en una afirmación respecto de todo ejemplo de cierto conjunto, podamos sustituir un ejemplo *dado* Éste es el

15 *Principio de la sustitución*

Lo que pueda afirmarse acerca de *cualquier* ejemplo, no importa cómo sea escogido, puede afirmarse acerca de cualquier ejemplo *dado* [46]

El principio de la deducción y el principio de la sustitución están entrañados en todo razonamiento demostrativo Sin estos dos principios sería imposible construir un sistema deductivo Una vez que las proposiciones primitivas han sido enunciadas, es posible, por medio de estos principios, deducir conclusiones que son más y más complicadas El desarrollo de las proposiciones primitivas enunciadas en los *Principia mathematica* tiene lugar en virtud del uso repetido de estos dos principios. A éstos, en consecuencia, puede conferírseles una grandísima importancia en la construcción de un sistema deductivo [47]

Los lógicos matemáticos han adoptado, en su mayoría, la definición de implicación en términos de negación y disyunción, lo cual enunciamos en la página 219 Ciertos teoremas que se desprenden de esta definición han sido considerados paradójicos Ahora debemos examinarlos La definición de *implicación*, que hemos de considerar, es

$$p \supset q = \sim p \vee q \quad Df$$

Puesto que "$\sim p$" significa "p es falsa", y "p" significa "p es verdadera", esta definición requiere o bien que p, el elemento implicante, sea falsa, o bien que q, el elemento implicado, sea verdadera *Siempre* que éste sea el caso, la primera proposición implica la segunda, *de acuerdo con esta definición de "implicación"* Ya hemos visto que "$p \supset q$" excluye solamente la posibilidad "p verdadera, q falsa" Así, por ejemplo, dada la proposición *verdadera* "2+2=4", y la proposición

[45] La proposición "$p \supset : p \supset p : q$" es verdadera independientemente de que p sea verdadera o falsa, o de que p implique q o no Por lo tanto, esta proposición produce solamente la hipótesis de que p es verdadera, de modo que no permite la afirmación independiente de q

[46] Véase *Principia mathematica*, *9 12

[47] Cf W E JOHNSON, *Logic*, parte II*, capítulos I y II

falsa "El sol es frío", la proposición compuesta "*O bien '2+2=4' es verdadera, o bien 'El sol es frío' es falsa*" es verdadera En consecuencia la proposición, "'*El sol es frío' implica* '2+2=4'" es verdadera, puesto que "implica" está definido para significar "o bien la primera proposición (es decir, la implicante) es falsa, o bien la segunda (es decir, la implicada) es verdadera", no excluyendo la posibilidad de que ambas puedan ser verdaderas

Esta definición de "implica" no es familiar, de modo que sus consecuencias probablemente parezcan raras Es importante que el lector se familiarice con esta noción Es posible hacerla más clara si consideramos las siguientes equivalencias

$$p \supset q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim (p \sim q)^{48}$$

$$\sim p \supset q \equiv p \vee q \equiv \sim (\sim p \sim q)$$

$$p \supset \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim (p\ q)$$

$$\sim p \supset \sim q \equiv p \vee \sim q \equiv \sim (\sim p\ q)$$

Así, dada esta definición de "implica", entonces, cuando $p \supset q$, no es el caso que p sea verdadera y q falsa, también, si ambas p y q son verdaderas, entonces, nuevamente, no es el caso que p sea verdadera y q falsa Por lo tanto, cuando p es falsa, y también cuando ambas p y q son verdaderas, entonces p *implica* q Estas consecuencias de esta definición de implicación son análogas a las consecuencias que resultan de la introducción de la clase nula en el sistema de clase Así,

(i) $\sim p \supset q$ corresponde a $0 < \alpha$

(ii) $\sim p \supset \sim q$ corresponde a $0 < 0$

(iii) $p \supset q$ corresponde a $\begin{cases} \alpha < 1 \\ 1 < 1 \end{cases}$

De (i) obtenemos: cualquier proposición falsa implica cualquier proposición verdadera, de (ii) obtenemos cualquier proposición falsa implica cualquier proposición falsa Así, *cualquier proposición falsa implica cualquier proposición, verdadera o falsa* De (iii) obtenemos cualquier proposición verdadera implica cualquier proposición verdadera; de (i) obtenemos: cualquier proposición verdadera es implicada por cualquier proposición falsa Así, *una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición, verdadera o falsa* Estos resultados corresponden a la interpretación para las clases, a saber, (1) *La clase nula está contenida en toda clase*, (2) *Cualquier clase está contenida en el universo* Según la interpretación proposicional, estos teo-

[48] La primera hilera puede leerse como: "p implica q" equivale a "o bien p es falsa o bien q es verdadera" equivale a "no es el caso que p sea verdadera y q sea falsa"

remas que acabamos de enunciar en cursivas se conocen con el nombre de "paradojas de la implicación". Pero estos teoremas no son paradójicos, son las consecuencias inevitables de la definición de la implicación en términos de negación y disyunción Debe observarse que en el caso de las proposiciones hay sólo dos posibilidades por lo que se refiere a la verdad y a la falsedad, a saber, $p=1$ o $p=0$ Los elementos p, q, interpretados según la análoga de la clase considerada como una *extensión*, están limitados a estas dos posibilidades Así, pues, p y q son equivalentes cuando ambas son verdaderas o cuando ambas son falsas En consecuencia, negar que p implica a q es afirmar que $\sim p$ implica a q

Es decir, $\sim(p \supset q) \supset (\sim p \supset q)$

Pero, en el caso de las clases, negar que α está incluida en β no es afirmar que α está incluida en $\overline{\beta}$, puesto que α y β pueden interceptarse De tal suerte, hay tres posibilidades por lo que se refiere a α y β, pero sólo dos posibilidades por lo que se refiere a p y q En el caso de la interpretación de clase, por lo tanto, no se presentan estas paradojas aparentes

El hecho de que las consecuencias de la definición de la implicación que hemos estado considerando hayan sido llamadas "paradojas", ha causado indudablemente alguna confusión Como ha señalado el profesor Moore, esas consecuencias "parecen paradójicas sólo porque, si empleamos 'implica' en cualquier sentido ordinario, son ciertamente falsas" [49] Es claro que "implica" se emplea ordinariamente en un sentido tal que la implicación constituye una base para la inferencia Pero ya hemos visto que, a fin de que q sea *inferida* de p, es preciso que podamos omitir p Pero p puede omitirse sólo si p es verdadera, es decir, sólo si p puede ser afirmada Así pues, en el caso de una proposición falsa no podemos omitir el elemento implicante Si *sabemos* que p es falsa, entonces sabemos que p implica q (en el sentido que hemos definido), pero no podemos proceder a afirmar p, puesto que tal procedimiento sería contradictorio Por lo tanto, no podemos *inferir* q, puesto que esta inferencia requiere la afirmación de p Asimismo, si *sabemos* que q es verdadera, entonces sabemos que p *implica* q, pero no podemos proceder a *inferir* q, puesto que ya *sabíamos* que q es verdadera [50] Como lo ha admitido Russell, "Siempre que p es falsa, 'no-p o q' es verdadera, pero es inútil para la inferencia, que requiere que p sea verdadera Siempre que se sepa que q es verdadera, se sabe por supuesto que 'no-p o q' también es verdadera, pero también es inútil para la inferencia, puesto que q ya es conocida y no hace falta inferirla" [51] Russell establece una distinción entre la *validez* de la inferencia y lo que él llama la "factibilidad práctica de

[49] *Philosophical studies*, p 295

[50] Debe hacerse referencia a la p 252 y a las pp 250 51, más adelante

[51] *Introd math phil*, p 153

la inferencia" Esta distinción no parece haber sido bautizada con mucha fortuna Lo importante es distinguir entre las relaciones lógicas que pueden regir entre las proposiciones, en virtud de las cuales relaciones es posible la deducción, y la verdad de las premisas sin las cuales la deducción no sería válida Las proposiciones falsas implican otras proposiciones, pero no pueden ser convertidas en la base de inferencias válidas en las que se afirme que la conclusión es *verdadera* No hay, pues, razón alguna para considerar las consecuencias de la definición de la implicación como paradójicas Serían paradójicas sólo si se las considerara como paradojas de la *inferencia* Pero en ese caso no serían, estrictamente hablando, *paradójicas*, serían *falsas*