VIII SIMBOLOS Y FORMA

"Es una perogrullada profundamente errónea, repetida en todos los cuadernos escolares y por personas eminentes cuando hacen discursos, decir que debemos cultivar el hábito de pensar lo que estamos haciendo La verdad es todo lo contrario La civilización avanza al aumentar el número de operaciones importantes que podemos ejecutar sin pensar en ellas" —A N WHITEHEAD

§ 1 *La utilidad de los símbolos*

En el capítulo II distinguimos entre los signos y los símbolos y entre los símbolos verbales y los no verbales Vimos que algunos símbolos verbales son imitativos y algunos representativos En este capítulo trataremos principalmente los símbolos no verbales Las *S*, *M*, *P* usadas para representar los términos del silogismo, y las *p*, *q*, *r* usadas para representar las proposiciones, son ejemplos de símbolos no verbales

Podemos empezar considerando algunas de las diferentes maneras en que podemos usar símbolos, verbales o de otra clase. El profesor Stout ha hecho una clasificación triple de los símbolos o signos, basada en la manera en que el pensante utiliza el símbolo para referirse a algo [1] Así, él distingue: signos expresivos, signos sugestivos y signos sustitutos (1) *Signos expresivos*, o sea palabras Un signo expresivo es el medio por el cual prestamos atención a su referendo Al escuchar la palabra "cabbage" ("repollo", en inglés), por ejemplo, generalmente no prestamos atención al sonido como tal, o, al leerla, a la forma de los tipos de imprenta que forman la palabra; nos referimos en seguida a lo que ella representa Por lo tanto, aparte el accidente histórico de nuestro conocimiento de un lenguaje dado, podríamos usar igualmente bien la palabra "chou" ("repollo", en francés) [2] De manera similar, una *oración expresa* una proposición No atendemos a la oración, sino que, como señalamos en el capítulo IV, pasamos directamente a la proposición que la oración transmite

[1] *Analytic psychology*, vol II

[2] Véase nota al calce núm 2 del capítuló II

(2) *Signos sugestivos,* o sea, la forma del caballo en el ajedrez o la imagen de la reina de espadas en una baraja Un signo sugestivo evoca una cierta idea, y *esta idea* recibe nuestra atención independientemente del signo Así, en el ajedrez, la forma del caballo sugiere los movimientos que éste puede hacer No atendemos a la forma, sino que fijamos nuestra atención en los movimientos que la forma sugiere

(3) *Signos sustitutos,* o sea, los símbolos usados en la lógica y las matemáticas Un signo sustituto toma el lugar de lo que representa Es meramente *representativo* Tales signos sólo pueden ocurrir cuando hay reglas fijas de manipulación u operación, derivadas de la naturaleza de sus referendos El profesor Stout utiliza la palabra "significado" para lo que un signo significa En su lenguaje, podemos decir que un signo expresivo *expresa* un significado, un signo sugestivo *sugiere* un significado que no expresa; un signo sustituto es un *sustituto del significado* Stout resume así la distinción: "Una palabra es un instrumento para pensar acerca del significado que ella expresa; un signo sustituto es un medio de *no* pensar acerca del significado que él simboliza "[3] De acuerdo con la distinción que establecimos entre signo y símbolo, resulta claro que sólo los símbolos no verbales pueden ser signos sustitutos Podría suponerse que nunca deberíamos querer usar símbolos, para no pensar acerca de sus referendos Pero eso sería un error Más adelante veremos que los procesos de razonamiento largos y complicados, como aquellos que implican las matemáticas, serían imposibles sin la ayuda que ofrece un simbolismo que puede ser manipulado de acuerdo con ciertas reglas de operación a fin de reducir el pensamiento inteligente a un mínimo

En el capítulo II vimos que el lenguaje no sólo es ambiguo, sino también necesariamente vago Su utilidad, para los propósitos ordinarios, depende de este hecho de que es necesariamente vago En consecuencia, no es susceptible de análisis preciso El lenguaje confunde aquellas distinciones sobre las que se basa el razonamiento exacto, y frecuentemente es simple donde las ideas expresadas son complejas Puesto que el lenguaje[4] se desarrolla bajo la presión de las necesidades prácticas del hombre y es primordialmente el medio de expresar el aspecto emotivo de su naturaleza, resulta claro, primero, que el lenguaje debe ser empleado para expresar una inmensa variedad de experiencias diferentes; segundo, que las mismas formas del lenguaje deben ser usadas a veces para expresar lo que en realidad es diferente; tercero, que el lenguaje es deficientemente adecuado para expresar lo que es relativamente abstracto y lógicamente simple Se desprende de todo esto que el lenguaje se vería estorbado en su función normal si su análisis fuera llevado más allá de lo que requieren los usos ordinarios de la vida cotidiana Por ejemplo: deseamos indicar a un hombre se-

[3] *Loc cit*, p 194

[4] A lo largo de todo este capítulo usaremos "lenguaje" para significar "lenguaje ordinario", o sea, lenguaje no simbólico

diento: "Aquí hay agua, tómala"; a un hombre abrumado por alguna tragedia: "Hay cosas buenas en la vida, aférrate a ellas" No sólo no nos interesa saber si la palabra "hay" expresa o no la misma cosa en estos dos casos; nuestra expresión práctica se vería estorbada si no pudiéramos utilizar la misma palabra Considérese, por ejemplo, las oraciones "Hildebrando es un hombre", "Todos los papas son hombres", "Algunos soldados son patriotas", "Shakespeare es el autor de *Hamlet*" Estas oraciones tienen la misma forma gramatical, pero, como ya hemos indicado, su análisis lógico revela que ellas expresan proposiciones que son fundamentalmente diferentes en su forma El verbo "ser" expresa indiferentemente *existencia, predicación, identidad, igualdad*, por ejemplo: "Dios es", "Sócrates es sabio", "Dos y dos son cuatro" "En aquellos días había hombres que eran gigantes", "Los hombres son falibles"

Parecería, entonces, que el lenguaje es engañoso y que el análisis gramatical no constituye una guía segura para la forma lógica Debido a la función práctica del lenguaje, los lenguajes ordinarios de los pueblos civilizados son adecuados para expresar hechos complicados en forma breve, pero no para expresar de manera simple lo que es lógicamente simple Por ejemplo, "Ese mantel está sucio" expresa en forma breve y clara un estado de cosas sumamente complicado Asimismo, "Eso es un reloj", "El uno es un número" expresan brevemente algo que, al ser analizado, se descubre que es sumamente complicado Además, tienen la misma forma gramatical Pero la más leve reflexión revela que la relación del referendo de "eso" al referendo de "un reloj" es totalmente diferente de la relación del referendo de "uno" al referendo de "un número" El poner de manifiesto esta diferencia utilizando el lenguaje ordinario implica una considerable prolijidad, como lo sugiere la oración anterior, que meramente enuncia la necesidad del análisis Si intentáramos ser lógicamente precisos sin dejar de usar el lenguaje ordinario, pronto nos encontraríamos perdidos en un laberinto de palabras Esto puede ilustrarse en forma más breve mediante un ejemplo sencillo Compárense las dos expresiones siguientes:

(1) "$x+y=y+x$"

(2) "Si se añade un segundo número a cualquier número dado, el resultado es el mismo que si el primer número hubiese sido añadido al segundo "[5]

Cualquier persona que entienda los signos algebraicos + e =, entenderá sin dificultad la primera expresión Ciertamente, tal y como está expresada, parece tan simple que el hombre ordinario podría considerar que la afirmación es obvia y carece de importancia Pero la segunda expresión es prolija Requiere un mayor esfuerzo de aten-

[5] Esta formulación está tomada de A N WHITEHEAD, *Introduction to mathematics*, p 61 El estudiante novato puede leer con gran provecho todo el capítulo v de aquel libro, del cual está tomada esta afirmación

ción para aprehender su significado, que el que requiere la primera Es la *simplicidad lógica* de las nociones implicadas lo que hace que su expresión en lenguaje sea tan engorrosa Para los fines de la lógica, el lenguaje es insuficientemente analítico Además, el lenguaje sólo abstrae hasta el grado en que lo que es abstracto interesa al hombre corriente La abstracción presupone análisis El análisis de una situación compleja implica su resolución en elementos simples Un elemento es simple ya sea cuando no es susceptible de mayor análisis —y en este caso será *últimamente simple*—, ya sea cuando no es necesario, para el propósito dado, llevar el análisis más adelante — y en este caso es *relativamente simple* Por lo tanto, un elemento simple es uno del que no se requiere que sea, o no pueda ser, más analizado Los propósitos prácticos pueden ser satisfechos con un cierto grado de análisis que es totalmente inadecuado a las necesidades del pensamiento exacto [6] Abstraer es seleccionar de una situación compleja elementos que no se nos dan aislados El lenguaje como tal implica cierto grado de abstracción, pero puede ser el mínimo requerido para los fines de la comunicación y la expresión Compárense, por ejemplo, las siguientes expresiones:

(1) Yo corto mi mano con un cuchillo

(2) Yo corto mi mano con un pedazo de vidrio

(3) Yo corto el brazo de mi enemigo

(4) Yo corto el árbol

(5) Yo corto las páginas de mi libro

(6) Ellos cortan la leña en dos

En cada una de estas oraciones ocurre "cortar", pero en cada caso ocurre en un contexto diferente "Cortar" expresa una noción que es relativamente abstracta En algunos lenguajes primitivos esta noción no ha sido abstraída lo suficiente para ser expresada por una sola palabra Existen en tales lenguajes muchas palabras diferentes que expresan diferentes *modos de cortar*, pero ninguna palabra para expresar *cortar* [7] Los lenguajes civilizados difieren en cuanto al grado en que usan palabras abstractas Por ejemplo, el latín usa pocas palabras abstractas; el inglés, muchas

La invención de nuevas palabras es necesaria para dos propósitos diferentes, pertinentes a la consideración de la utilidad del simbolismo En primer lugar, la nueva palabra es necesaria, como acabamos de ver, porque el análisis de la situación ha sido llevado más lejos Este punto puede ilustrarse mediante una comparación entre el latín y el griego por una parte, y el inglés por otra Puesto que el latín y el griego

[6] *Cf* capítulo xv
[7] Véase R R Marret, *Anthropology*, capítulo v

son lenguajes de inflexión, representan un análisis incompleto de las ideas que expresan Mediante el cambio de la raíz o de la terminación de una palabra, el latín y el griego expresan una situación que en el inglés requiere el uso de verbos auxiliares y preposiciones Estos verbos auxiliares y preposiciones representan un análisis explícito de situaciones complejas De esta manera el lenguaje gana en expresividad y se desarolla un instrumento más y más adecuado para expresar lo que deseamos expresar exactamente Así adquirimos mayor facilidad y precisión de expresión Donde nuestra pobreza de pensamiento sea grande, nuestro vocabulario será correspondientemente escaso, donde nuestro pensamiento sea vago, no estaremos conscientes de que nuestro lenguaje es defectuoso, en consecuencia, no veremos ventaja alguna en la precisión El lenguaje técnico de la ciencia ofrece numerosas ilustraciones de la invención de nuevas palabras para expresar nuevas distinciones Por ejemplo, *energía* tiene que ser distinguida en energía *cinética* y energía *potencial* En segundo lugar, es necesario inventar nuevas palabras que nos permitan economizar el pensamiento Por ejemplo, a menudo deseamos considerar solamente aquellos rectángulos que tienen lados iguales; por lo tanto, tenemos la palabra "cuadrado" La palabra "cuadrado" nos permite economizar el pensamiento Una situación compleja, o un conjunto complejo de características, será representado en el lenguaje ordinario por una sola palabra cuando necesitamos pensar acerca de esa situación o conjunto de características y referirnos frecuentemente a una o a otro Por ejemplo, supongamos que fuera frecuente la situación en la que alguna persona o grupo de personas en un lugar dado está viendo un arcoiris y oyendo cantar una alondra al mismo tiempo y tuviera también alguna significación ritual; entonces, sin duda alguna, se inventaría una sola palabra para expresar esta ocurrencia compleja Pero, puesto que esta particular concomitancia de circunstancias no ha sido considerada importante, dejamos al poeta que la advierta y no pensamos que nuestro lenguaje es defectuoso En todo caso, todavía necesitaríamos las palabras separadas para expresar los constituyentes separados de la ocurrencia compleja que acabamos de sugerir, dado que estos constituyentes también ocurren en otros contextos, del mismo modo que necesitamos las palabras sepaıadas que expresan aquellas propiedades de los rectángulos que son cuadrados

No sucede de otra manera con la lógica La invención y el desarrollo del simbolismo especial necesario para los propósitos de la técnica lógica consiste tan sólo en llevar al máximo grado de análisis del pensamiento y precisión de la expresión ese reconocimiento de las distinciones que está presente, hasta cierto punto, en todo lenguaje De tal suerte, los símbolos lógicos tienen un doble propósito que cumplir: abreviar y abstraer Al cumplir estos propósitos, el simbolismo lógico muestra que tiene una función adicional, a saber, la revelación de la forma

Desde un principio debemos distinguir entre dos *tipos* diferentes de símbolos, para los cuales Johnson usa los nombres convenientes de *símbolos taquigráficos* y *símbolos ilustrativos* [8] Los símbolos taquigráficos son meramente abreviaciones de palabras o signos concisos que sustituyen palabras, representando directamente aquello que simbolizan Ejemplos familiares, algunos de los cuales ya hemos utilizado, son: ≡ por *es equivalente a*, *S a P* por *Toda S es P*, *Fig* por *Figura*, Q. E D por *quod erat demonstrandum*, *Barbara* por *el modo* A A A *en la Figura* I, + por *más* Más adelante usaremos el símbolo taquigráfico *ent* por *entraña* (*entails*, en inglés), debido al profesor G E Moore Russell emplea el signo arbitrario ⊃ para significar *implica* definido de una manera especial. Los matemáticos usan ⩾ para *mayor que* o *igual a* El propósito de un símbolo taquigráfico es, principalmente, el de abreviar una expresión Un símbolo ilustrativo es de un tipo muy diferente, es un símbolo variable Cuando expresamos la primera figura del silogismo como

Si	M — P
y	S — M,
entonces	S — P,

los símbolos M, P, S son símbolos ilustrativos Pueden ser reemplazados por cualesquiera términos que tengan sentido para dar un ejemplo particular de un silogismo en la Figura I Un símbolo ilustrativo es, pues, una letra del alfabeto arbitrariamente escogida y que representa, no algún objeto definido y singular, sino *cualquiera* de un conjunto de objetos indicados por el contexto Empleamos tales símbolos al explicar las inferencias inmediatas, así, *Todo S es P* fue considerado como representativo de *cualquier* afirmación universal afirmativa "*S a P*" combina símbolos ilustrativos y taquigráficos, puesto que "*a*" es taquigráfico de "proposición universal afirmativa", en tanto que "*S*" y "*P*" son símbolos ilustrativos Vimos en el capítulo VI que Aristóteles utilizó tales símbolos a fin de poner de manifiesto la dependencia de la validez de un silogismo respecto de su forma

En el capítulo IV vimos que la distinción entre diferentes clases de proposiciones es una distinción entre diferentes formas proposicionales Señalamos que *forma* es una concepción generalizada que no es fácil de expresar simplemente El empleo de símbolos nos permite exhibir la forma Por esta razón, siguiendo el ejemplo de Aristóteles, utilizamos símbolos cuando consideramos el silogismo, puesto que lo que queríamos considerar no eran *papas*, *santos*, etcétera, ni ningunos hombres particulares como *Hildebrando*, etcétera, sino únicamente la *forma de implicación* Asimismo, al considerar las relaciones entre las proposiciones no nos interesaban los ejemplos determinados de

[8] Véase W E JOHNSON, parte I, capítulo III

proposiciones, sino su forma Así usamos *p*, *q*, *r* para representar pro posiciones simples, construyendo con tales símbolos proposiciones compuestas, por ejemplo: *Si p, entonces q* Aquí, *p* y *q* representan *cualesquiera* proposiciones simples Éstos son, pues, símbolos ilustra tivos La forma verbal "*Si*. *entonces* " expresa la forma de la proposición, permanecerá inalterada no importa cuáles proposiciones simples sustituyan a *p* y *q* Los símbolos que expresan *forma* serán llamados *constantes lógicas* [9] Algunos símbolos taquigráficos son usa dos para representar constantes lógicas, por ejemplo: D, *ent* Un signo arbitrario como $\supset$ o $+$ es un símbolo ideográfico La ventaja de los ideogramas es evidente Son compactos, de modo que por medio de ideogramas es posible a menudo presentar de una sola ojeada una fórmula que, de otra manera, sería extensa en su expre sión Vimos la ventaja de tal compactibilidad en el caso de la expresión simple $x + y = y + x$ Al tratar proposiciones de considerable com plejidad, es necesario algún recurso para economizar esfuerzo mental a fin de poder aprehender procesos de razonamiento complicados Cualquiera que haya reflexionado sobre los procesos de pensamiento implicados en la elaboración de un teorema matemático complicado, admitirá que en la práctica es indispensable alguna economía de pen samiento Más adelante veremos cómo la utilización de tales símbolos nos permite formular reglas de transformación precisas que sim plifican el proceso del razonamiento Como lo expresa el profesor Whitehead: "Las operaciones del pensamiento son como las cargas de caballería en una batalla: son estrictamente limitadas en número, exigen caballos descansados y deben efectuarse sólo en momentos decisivos " [10]

El simbolismo lógico tiene, pues, dos funciones importantes que realizar. En primer lugar, economiza pensamiento y hace posible así el desarrollo de inferencias complicadas En segundo lugar, por medio de símbolos adecuados es posible revelar la forma de manera ade cuada, en consecuencia, se puede alcanzar la generalidad Para este fin se requieren dos diferentes clases de símbolos: símbolos taquigrá ficos y símbolos ilustrativos Hay tres características importantes que debe poseer todo simbolismo lógico satisfactorio: (1) concisión, (2) precisión, (3) sistematización La naturaleza y la importancia de estas características se harán más claras a medida que avancemos Puede decirse que, en tanto que la primera característica se hace necesaria en virtud de las limitaciones del pensamiento humano, las otras dos dependen de la naturaleza de la lógica

[9] Los lógicos simbólicos usan frecuentemente la expresión "constante lógica" para significar lo que es simbolizado, no el símbolo Esto me parece un error que produce confusión Por lo tanto, al decir "constante lógica", yo significo el *símbolo* mediante el cual la forma es simbolizada

[10] WHITEHEAD, *op cit*, p 61

§ 2 *Ilustraciones tomadas del simbolismo de las matemáticas*[11]

Todo el mundo admitirá que, como cuestión de experiencia práctica, es mucho más fácil resolver una suma en adición si se emplea la notación arábiga en lugar de los complicados números romanos Cualquiera que no esté convencido de esto sólo tiene que hacer el intento, digamos, con tres hileras que representen, cada una, números de un millón y pico. Los números romanos son difíciles de escribir; no son aprehensibles fácilmente de una ojeada, representan un análisis incompleto de las nociones que expresan La notación arábiga, en cambio, es concisa; por lo tanto, es fácilmente comprensible; su forma representa precisamente las nociones que expresa La notación 0, 1, 2 10, 11 100, 101 1,000, 1,001 y así sucesivamente, es significativa de inmediato Por medio de diez símbolos de diferente forma y de un sistema para colocarlos que hace que su valor dependa de sus posiciones, aun los grandes números son de fácil comprensión No será necesario aquí explicar el sistema, con el que podemos dar por sentado que el lector está familiarizado Pero vale la pena señalar dos puntos Primero, por medio de los diez símbolos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y el recurso de colocarlos en yuxtaposición, puede simbolizarse *cualquier* número Segundo, este recurso es el más conciso posible Por ejemplo, para simbolizar ciento veinte y cuatro, escribimos 124 Aquí la posición del 4 indica 4 unidades, la posición del 2 antes del 4 indica 20 unidades; la posición del 1 antes del 2 y el 4 indica 100 unidades Ahora bien, nada es más fácil de escribir que nada, por lo tanto, 24 representa una economía de esfuerzo en comparación con XXIV En segundo lugar, puesto que el valor del número es definido por su posición, de modo que la posición del 4 nos exige escribir 2 antes de él para simbolizar 24, el símbolo 24 es significativo Pero cuando no hay unidades que sigan al 2, es necesario un símbolo para dar al 2 la posición que simbolizará veinte unidades De ahí la invención del símbolo 0, cuyo primer servicio consiste en colocar los demás números en sus lugares correctos La noción de un *número* cero es un acontecimiento mucho más tardío Ello no obstante, el símbolo es esencial para la utilización práctica de la notación arábiga Por lo tanto, al hombre práctico le parece ser, más obviamente, sólo un símbolo Como dice el profesor Whitehead: "Lo que pasa con el cero es que no tenemos que usarlo en

[11] Este párrafo se inserta contando con que el estudiante esté familiarizado con el empleo práctico de los símbolos en las matemáticas, pudiendo así recibir ayuda en la comprensión de la importancia de un simbolismo satisfactorio Se puede referir al estudiante a A N WHITEHEAD, *Science and the modern world*, capítulo II; *An introduction to mathematics*; y a G H HARDY, *Pure mathematics* Todo lo que es importante en esta sección se ha derivado de estos autores Véase también M CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, vol I

las operaciones de la vida cotidiana Nadie sale a comprar cero pescado Es, en cierto modo, el más civilizado de todos los cardinales, y su empleo nos es impuesto sólo por las necesidades de los modos cultivados del pensamiento" [12]

Una consideración del sistema arábigo de notación revela, pues, la importancia de una notación concisa y la ventaja de la extensibilidad indefinida del sistema. Por ejemplo, si el número más grande que jamás hubiésemos conocido fuera 53,489,701,627, sabríamos en se guida que el numeral siguiente es 53,489,701,628 Es importante recordar que las primeras concepciones de la aritmética dependen de la noción de contar Contar es corresponder un conjunto de objetos contra otro conjunto, de una manera particular Estamos tan familiarizados con este proceso que raramente reflexionamos acerca de lo que implica el proceso de contar Supongamos que tenemos un conjunto de cinco manzanas Podemos disponer las manzanas en una hilera, quitar una cada vez y simultáneamente cerrar un dedo de la otra mano Al escribir esto hemos usado el símbolo "cinco" para evitar la prolijidad; pero en la operación primitiva que estamos considerando, se supone que no estemos familiarizados con la forma 5, ni con el sonido representado por la palabra escrita "cinco" Si tene mos un conjunto dos veces mayor, podemos repetir la operación utili zando la otra mano Luego, si es necesario, podemos usar los dedos de los pies de una manera similar Pero es difícil llevar muy lejos este método primitivo de contar [13] Si ahora representamos los cinco dedos de la mano mediante formas arbitrarias, digamos, A, B, C, D, E, haciendo que A represente el pulgar y E el meñique, entonces podemos enunciar con brevedad lo que se estaba haciendo exactamente en nuestro primitivo método de contar Primero colocamos A contra una manzana, B contra otra, C contra otra, y así sucesivamente De tal modo se encontró que el número de manzanas era igual al número de dedos Si quisiéramos descubrir el número de manzanas de nuestros vecinos, podríamos repetir el proceso usando sus manzanas Pero sería mucho más simple si tuviéramos un conjunto de símbolos reconocido, que cualquiera de nosotros pudiera usar y llevar en la mente Los números proporcionan tal conjunto de símbolos [14] Así, haciendo que A, B, C, D, E representen el conjunto de objectos, ya sean dedos, o nuestras manzanas o las manzanas de nuestros vecinos, podríamos establecer una relación representada de la siguiente manera [15]

[12] *Introduction to mathematics*, p 63 Aquí vemos que un símbolo intro ducido por conveniencia práctica condujo luego al descubrimiento de una noción matemática importante

[13] Pero se ha afirmado que pueblos primitivos que usan un sistema de numerales expresados por signos digitales han logrado contar hasta 10,000 Los dedos, cuando se les usa así, se convierten en numerales

[14] Debe observarse que "numeral" representa al *símbolo*, sea cual fuere, que representa un *número*

[15] Se observará que no se utiliza el 0

A, B, C, D, E
1, 2, 3, 4, 5

Aquí un numeral corresponde a una, y sólo a una, letra Esto se llama una correspondencia de uno a uno Es la relación que relaciona la serie de números y cualquier conjunto de objetos contados por medio de ella Estableciendo esta correspondencia de uno a uno, primero entre los números y nuestras manzanas, y después entre los números y las manzanas de nuestro vecino, podemos descubrir que tenemos el mismo número de manzanas sin necesidad de ponerlas en relación las unas con las otras, o con nuestros dedos Debe observarse que el último número del conjunto representa el *número* del conjunto de objetos contados Por lo tanto, no es necesario decir: "el número del conjunto es 1, 2, 3, 4, 5"; hasta decir "5" Si para contar dependiéramos de los dedos de las manos y los pies, necesitaríamos alguna convención acerca del orden en que vamos a tomarlos, a fin de asegurar una ventaja similar

Considérense, nuevamente, un conjunto de dos manzanas y otro conjunto de tres manzanas Si adoptamos nuestro método previo (representando el primer conjunto con A, B, y el segundo con C, D, E), encontramos que obtenemos

A, B; C, D, E
1, 2; 1, 2, 3

Ahora bien si ponemos 1, 2, 1, 2, 3
contra 1, 2, 3, 4, 5

encontramos que el número 2 del primer conjunto puede ser combinado con el número 3 del segundo conjunto para que dé 5 cuando se le cuente contra los números Es decir, que cuando sumamos, combinamos un conjunto, cuyo número es conocido, con otro conjunto, cuyo número es conocido

Es obvio que en esta última operación resultaba indiferente comenzar con el conjunto A, B o con el conjunto C, D, E Es importante subrayar esto Estamos tan familiarizados con estas operaciones que no nos damos cuenta de la dificultad que debe de haber tenido el hombre primitivo para descubrir estas características El simbolismo ha hecho que la operación sea fácil Además, se requiere un considerable grado de abstracción antes de que sea posible aprehender el hecho de que podemos comparar, no sólo dos conjuntos de manzanas por lo que toca a su número, sino cualquier conjunto de objetos con cualquier otro conjunto Como lo expresa el profesor Whitehead: "Durante un periodo largo, se habrán comparado grupos de peces entre sí con respecto a su multiplicidad; y se habrán comparado grupos de días entre sí Pero el primer hombre que observó la analogía entre un grupo de siete peces y un grupo de siete días efectuó un avance notable en la historia del pensamiento Fue el primer hombre que concibió un concepto perteneciente a la ciencia de las matemáticas puras" [16]

La multiplicación es adición repetida Digamos que queremos encontrar el número de un conjunto de manzanas considerado tres veces Supongamos que el conjunto consiste en A, B Entonces ponemos A, B contra 1, 2; repetimos y ponemos A, B contra 3, 4; repetimos y ponemos A, B contra 5, 6. El resultado es igual al producto de 3 y 2 No es necesario prolongar el examen de este método Se advertirá fácilmente que la sustracción es la operación inversa de la adición, y la división la operación inversa de la multiplicación Pero es importante observar que, a todo lo largo de nuestro examen, hemos establecido ciertos supuestos acerca del orden en que hemos considerado los objetos Formulemos ahoia tales supuestos Tomemos cualesquiera tres números al azar, digamos 2, 5, 8 Suponemos que hemos llegado a la etapa en que se usa el símbolo + para *adición* y × para *multiplicación* Entonces tenemos:

(1) $2 + 5 = 5 + 2$

(2) $2 \times 5 = 5 \times 2$

(3) $2 + (5 + 8) = (2 + 5) + 8$

(4) $2 \times (5 \times 8) = (2 \times 5) \times 8$

(5) $(2 + 5) \times 8 = (2 \times 8) + (5 \times 8)$

Hemos tomado estos números, 2, 5, 8, *al azar* Es decir, no importó qué número tomáramos O sea, que podemos tomar *cualquier* número Pero 2, 5, 8 son símbolos que representan tres números definidos diferentes Sería obviamente más conveniente inventar un simbolismo que pueda representar *cualquier* número Las letras del alfabeto constituyen un conjunto de símbolos conveniente y accesible En lugar, entonces, de decir "$2 + 5 = 5 + 2$, y esto será verdadero si tomamos *otros* números que no sean 2 y 5", podemos decir "siendo x e y *cualesquiera* dos números, entonces $x + y = y + x$" En este caso x e y representan, no cualquier número *definido*, sino cualquiera de un cierto conjunto, a saber, el conjunto de los números Hacemos un empleo similar de los símbolos cuando decimos: "Si M es P, y S es M, entonces S es P", puesto que S, M, P representan, respectivamente, *cualesquiera* términos que ocurren como términos medio, mayor y menor en un silogismo La concepción que representan tales símbolos es perfectamente familiar y tiene una gran importancia Un símbolo de esta clase recibe el nombre de *variable* Los objetos definidos que pueden ser sustituidos por la variable, a fin de dar sentido a una expresión dada, se llaman los *valores de la variable* En el siguiente

[16] *Science and the modern world*, p 29 (primera edición)

párrafo nos ocuparemos de la importancia de esta noción Es imposible entenderla aisladamente de la noción de función

La importancia de una buena notación, es decir, de un conjunto sistemático de símbolos, puede ilustrarse partiendo de la historia de los símbolos empleados en los diferentes cálculos Se recordará que el cálculo fue descubierto aproximadamente al mismo tiempo, pero independientemente, por Newton y Leibniz Hubo una controversia acerca de cuál de ellos merece el reconocimiento de la prioridad; y los compatriotas de cada uno tomaron posiciones y dieron curso a una disputa estéril Ahora bien, aunque Leibniz y Newton estaban interesados en la misma noción, inventaron dos notaciones distintas La superioridad de la notación de Leibniz sobre la de Newton es admitida hoy por todo el mundo, pero en un principio los matemáticos ingleses se negaron a usar la notación de Leibniz En consecuencia, su trabajo se vio estorbado por la utilización de una notación innecesariamente complicada que ocultaba los conceptos importantes Durante la centuria siguiente, ningún matemático inglés pudo hacer un descubrimiento importante en su campo, mientras que en la Europa continental, donde se usaba la notación de Leibniz, se realizaron rápidos progresos No parece irrazonable suponer que los matemáticos ingleses resultaron perjudicados por el empleo de una notación menos satisfactoria En realidad puede afirmarse que un simbolismo adecuado es indispensable para el desarrollo de las matemáticas, pues un conjunto adecuado de símbolos presupone el análisis de las ideas fundamentales y al mismo tiempo constituye una ayuda para el análisis ulterior Mediante el empleo de símbolos usados sistemáticamente, expresiones que parecen ser de diferentes formas pueden ser expresadas de tal modo que resulta fácil advertir que son de la misma forma Por ejemplo:

(1) $x + y = 1$,

(2) $x + 2y = 2x + 3y - 1$,

(3) $4 = 2x^2 + 3x + 2$,

(4) $2 - 3x = 2x^2$,

parecen ser cuatro expresiones de formas diferentes Si, empero, son re-expresadas de modo que los símbolos variables y los símbolos numéricos se colocan todos a un lado de "=" y la expresión completa es igualada a 0, tenemos:

(1) $x + y - 1 = 0$

(2) $x + y - 1 = 0$

(3) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

(4) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Aquí resulta inmediatamente obvio que (1) y (2), (3) y (4) son de la misma forma [17]

Un simbolismo como el de las matemáticas obviamente se desarrolla con lentitud hasta llegar a su forma perfecta Cualesquiera ideas erróneas implicadas en el origen de un conjunto de símbolos estorbarán el análisis ulterior Así la notación numeral arábiga estaba, como hemos visto, perfectamente adaptada al proceso de contar un conjunto de objetos tomados en cierto orden Esta conexión con el proceso de contar oscureció la naturaleza fundamental del número Examinaremos más ampliamente este punto en el capítulo XI

Russell ha dicho: "El simbolismo es útil porque hace las cosas difíciles", en tanto que Whitehead dice que los símbolos "han sido introducidos, invariablemente, para hacer las cosas fáciles" Ambas afirmaciones son verdaderas La invención deliberada de un simbolismo complicado hace difícil de aprehender lo que parecía obvio, pues hace explícitas las distinciones que la vaguedad del lenguaje nos permite ignorar debido a que tales distinciones no tienen utilidad práctica Pero, por otra parte, es a través del simbolismo como llegamos a aprehender cuáles son las ideas importantes De esta manera se desenlazan nociones diferentes y sus relaciones se hacen evidentes De tal suerte, en última instancia, se obtiene una inmensa ganancia en simplificación, de manera que, como también señala Russell, el desarrollo ulterior de un simbolismo reduce nuestras dificultades La invención de cualquier conjunto de términos técnicos —por ejemplo, la terminología de la química— ilustra el mismo punto: el aumento aparente de oscuridad y complejidad, el aumento real de claridad y simplicidad Los términos técnicos utilizados por los corredores de bolsa y los apostadores son, sin duda, un caso en cuestión Seguramente que ciencias como la psicología o la sociología, que se encuentran todavía en su infancia, están limitadas por falta de un simbolismo adecuado Logran progresar en la medida en que desarrollan un simbolismo sugerido por la etapa actual de su análisis

§ 3 *Forma y función*

Hemos visto que la forma de una proposición es lo que permanece inalterado aunque todos los constituyentes de la proposición sean alterados Así, pues, la forma es la manera en que se juntan los constituyentes Cualquier proposición determinada exhibe una cierta forma proposicional

[17] El estudiante debe considerar la naturaleza de los recursos simbólicos implicados en la representación, digamos, de *cualquier* correlación lineal variable mediante

$ax + by - c = 0$, y de *cualquier* sección cónica mediante

$ax^2 + 2bxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$