Considérense los tres conjuntos de proposiciones:

(A) i Sócrates es sabio
ii Carlos I es desdichado.
iii Mussolini es ambicioso
iv Atenas es famosa
v Tú eres rico

(B) i O bien Carlos I debía ser ejecutado o bien Cromwell estaba equivocado
ii O bien Mussolini es un tirano o bien Salvemini está engañado
iii O bien Baldwin es honrado o bien los conservadores son estúpidos
iv O bien Francis Bacon es un poeta o bien Shakespeare escribió *Antonio y Cleopatra*

(C) i $4 = 8/2$
ii $5 = 10/2$
iii $6 = 12/2$
iv $7 = 14/2$
v $9 = 18/2$

En el conjunto (A) *sabio* está relacionado con *Sócrates* del mismo modo que *desdichado* con *Carlos I*, *ambicioso* con *Mussolini*, etcétera

En el conjunto (B) *Cromwell estaba equivocado* está relacionado con *Carlos I debía ser ejecutado* del mismo modo que *Salvemini está engañado* con *Mussolini es un tirano*, etcétera

En el conjunto (C) 8/2 está relacionado con 4 del mismo modo que 10/2 con 5, etcétera

En el conjunto (A) hay cinco proposiciones, cada una de las cuales exhibe la *forma de sujeto-predicado* En el conjunto (B) hay cuatro proposiciones compuestas, cada una de las cuales exhibe la *forma alternativa* En el conjunto (C) hay cinco proposiciones, cada una de las cuales exhibe la *forma relacional de ser la mitad de*

Mediante la utilización de símbolos ilustrativos podemos simbolizar la forma de las proposiciones en el conjunto (A) Así, si "*x*" simboliza uno cualquiera del conjunto de sujetos, y "*p*" uno cualquiera del conjunto de predicados, obtenemos "*x* es *p*" No podemos representar *la forma* de las proposiciones de sujeto-predicado mediante una proposición determinada tal como "Sócrates es sabio"; esta proposición *exhibe* la forma de sujeto-predicado, pero no la *simboliza*, puesto que la forma es una abstracción Al decir "la forma de sujeto predicado", *significamos* aquella forma que *cualquier* proposición de sujeto-predicado debe *exhibir* Del mismo modo, utilizando los símbolos ilustrativos "*p*" y "*q*" podemos simbolizar la forma de las proposiciones en el conjunto (B) mediante "o bien p o bien q" Debe observarse que "x" y "p" en el primer caso y "p" y "q" en el segundo son símbolos ilustrativos, mientras que "es" y "o bien o bien" son constantes lógicas Cualquier constituyente que pueda hacerse concordar adecuadamente con una forma proposicional dada puede ser representado mediante símbolos ilustrativos; la forma puede ser representada mediante constantes lógicas Si sustituimos cualquiera de los constituyentes determinados que son valores de los símbolos ilustrativos, el resultado es una proposición determinada Podríamos haber obtenido el conjunto (A), por ejemplo, partiendo de la forma "x es p" y luego encontrando constituyentes adecuados para "x" y para "p" Asimismo, supongamos que partiéramos de la forma "Si x es y, entonces m es n" Mediante la sustitución podríamos obtener la proposición "Si esta mujer tiene oído musical, entonces su marido es sordo"

Los ejemplos en el conjunto (C) podrían considerarse como obtenidos a partir de la consideración de cualquier número que sea la mitad del algún otro número Así, (1) puede ser expresado $4 = \frac{1}{2}(8)$; (2) puede ser expresado $5 = \frac{1}{2}(10)$, etcétera Si simbolizamos el primer número con "y", podemos expresar el número del cual se dice que es igual a y como "la mitad de algún otro número" Entonces "algún otro número" puede ser simbolizado con "x" y la expresión viene a ser "$y = \frac{1}{2}x$" En concordancia con esto, si sustituimos algún número determinado por x, sabemos qué número es y, a saber, la mitad de ese número Aquí, "x" e "y" son variables; "$= \frac{1}{2}$" es una constante lógica Ahora bien, si pensamos que la expresión "$y = \frac{1}{2}x$" meramente simboliza la forma de las cinco proposiciones en el conjunto (C), entonces "x" e "y" son símbolos ilustrativos relacionados de la manera específica que expresa la constante lógica "$= \frac{1}{2}$" Si, empero, consideramos que la expresión "$y = \frac{1}{2}x$" expresa una correspondencia determinada entre las variables "x" e "y" de tal índole que cuando se da el valor de x queda determinado en consecuencia el valor de y, entonces "$y = \frac{1}{2}x$" expresa una relación funcional Se dice de la variable y que está en dependencia funcional respecto de la variable x, por lo tanto, y es llamada la variable dependiente, y x la variable independiente Esta noción de la dependencia funcional es de suma importancia en las matemáticas [18] La noción general de una función puede simbolizarse mediante "$y = f(x)$" o "$y = g(x)$", etc, donde f, g o cualquier letra escrita fuera de los paréntesis significa una función indeterminada —es decir, variable— de x Algunas veces x es llamada el *argumento* de la función, e y el *valor de la función* [19] Así, en $y = f(x)$,

[18] El estudiante que no esté familiarizado con la noción de una relación funcional debe referirse al capítulo XVIII, § 2, más adelante

[19] Se observará que hablamos tanto de sustituir *valores por las variables* (por ejemplo: sustituir 10 por x en $y = \frac{1}{2}x$), como del *valor* del valor de la función (por ejemplo: 5 en el ejemplo dado).

y es el valor de alguna función indeterminada del argumento x Ejemplos familiares de funciones son: $y = x^2$, $y = 2x^2 + 3x + 1$, $y = \sin x$, $y = \log x$ A menudo es posible representar una relación funcional mediante una gráfica

Hasta aquí hemos ilustrado la noción de una variable mediante una relación funcional entre números Pero no hay necesidad de restringir así la noción Es, por lo tanto, deseable definir *variable* y *función* de tal suerte que evitemos esta restricción Debe observarse que la variable representa uno cualquiera de un conjunto o clase Podemos usar la palabra "elemento" por *miembro de una clase,* lo cual nos permite usar la segunda noción tan ampliamente como sea posible Una variable, entonces, puede definirse de la siguiente manera: *Una variable es un símbolo que denota uno cualquiera de una clase de elementos* La noción de relación funcional en su forma más general es la noción de correspondencia determinada, en abstracción del modo específico de tal correspondencia La especificación del modo de correspondencia la da una regla (o conjunto de reglas) de tal índole que el valor de la variable dependiente correspondiente a cada valor de la variable independiente queda en consecuencia determinado La clase representada por la variable y puede ser llamada los *referentes,* la clase representada por la variable x puede ser llamada los *relatos,* de la relación funcional Una variable dependiente puede ser determinada por dos variables independientes Por ejemplo, la temperatura de un gas es la función de su presión y su volumen No es esencial a la relación funcional el que y, la variable dependiente, sea determinada por cada valor de x, la variable independiente; ni el que a cada valor de x por el que se da y deba corresponder un, y sólo un, valor de y, pues x puede determinar un conjunto de valores de y Es necesario, pues, distinguir entre las funciones *de un solo valor* y las funciones *de muchos valores* Éstas pueden definirse de la siguiente manera:

Una variable y es una *función de un solo valor* de una variable x cuando existe una relación de correspondencia entre la clase representada por x y la clase representada por y, correspondencia de tal índole que cada valor de x determine de manera única un valor de y

Una variable y es una *función de muchos valores* de una variable x cuando existe una relación de correspondencia entre la clase representada por x y la clase representada por y, correspondencia de tal índole que cada valor de x determina un conjunto de valores de y

No es necesario, para nuestros fines, examinar las diferentes clases de funciones, pero es importante observar que estas definiciones no restringen las clases representadas por las variables a clases de números Lo más importante es tener claridad acerca del uso de la variable Una definición satisfactoria de *la variable* presupone la noción de *cualquiera* No es posible examinar esto aquí [20] Frege sugirió que la variable mantiene *un lugar vacío* que debe ser llenado por un ele-

[20] Véase RUSSELL, *Principles of mathematics,* capítulo VIII

mento de la clase representada por la variable, a fin de que la expresión en que ocurre la variable pueda ser completada [21] Esta afirmación no asegura, sin embargo, la condición de que, siempre que la misma letra aparece, el mismo valor será sustituido Así no podríamos distinguir entre "$3x^2 + x$" y "$3x^2 + y$". Lo que se necesita es la noción de *uno cualquiera* de una cierta clase definida por la función Es decir, que una variable representa *uno cualquiera, pero no uno determinado*, de un conjunto de elementos, siendo definido el conjunto por la relación funcional específica

En el sentido más general, toda expresión que contenga dos o más variables puede ser llamada una *función* Ahora debemos considerar la forma específica de función que Russell llama *función proposicional* Es aconsejable que empecemos con un intento de comprender qué quiere decir exactamente Russell cuando habla de una función proposicional, y luego consideremos la relación de *función proposicional* con el concepto matemático de *función* tal como lo hemos definido

Russell parece haber sido llevado a introducir la noción de función proposicional a fin de facilitar el análisis de las proposiciones generales tales como *Todos los hombres son mortales, Algunos hombres son sabios* Parece claro que lo que se asevera en la proposición *Todos los hombres son mortales* es que *cualquier hombre*, no importa cómo se le seleccione de entre la clase *hombres*, es mortal Esto podría expresarse en la forma: Si A representa *cualquier* hombre, entonces A es mortal Ahora bien, A en esta expresión es claramente una *variable* Es imposible considerar "A" como un nombre propio de un individuo arbitrariamente escogido; "A" representa *uno cualquiera* del conjunto de miembros que constituyen la clase *hombres* Si, por lo tanto, simbolizamos la variable por medio de la letra "x", de acuerdo con la costumbre usual, obtenemos el aserto: Si x es un hombre, entonces x es un mortal, para todos los valores de x La expresión "Si x es un hombre, entonces x es un mortal" es una *función proposicional* Mediante el empleo de esta expresión podemos hacer claro el análisis de la *proposición* general *Todos los hombres son mortales*. Este punto ha sido enunciado por Russell de una manera que pone de manifiesto muy claramente el uso de las funciones proposicionales Dice Russell:

> Ahora bien, cuando os preguntáis qué es lo que realmente se asevera en una proposición general tal como "Todos los griegos son hombres", por ejemplo, encontráis que lo que se asevera es la verdad de todos los valores de lo que yo llamo una función proposicional Una *función proposicional* es simplemente *cualquier expresión que contiene un constituyente indeterminado, o varios constituyentes indeterminados, y que se convierte en una proposición tan pronto como los constituyentes indeterminados son deter*

[21] FREGE, *Ueber Begriff und Gegenstand* Cf COUTURAT, *op cit*, p 148

minados Si yo digo "x es un hombre" o "n es un número", ésa es una función proposicional [22]

Resulta claro que "x es un hombre" no expresa una proposición, pues no expresa nada que sea verdadero ni falso, ya que x representa un elemento indeterminado Si sustituimos "Bernard Shaw" (que puede considerarse un nombre propio) en lugar de "x" en "x es un hombre", entonces "Bernard Shaw es un hombre" expresa una proposición verdadera Así, las proposiciones se obtienen a partir de funciones proposicionales mediante la sustitución de valores determinados en lugar de las variables que ocurren en la función proposicional También podemos obtener una proposición mediante la aseveración de que una función proposicional es verdadera (o falsa) para todos, o algunos, de los valores para las variables Así, "Para todos los valores de x, si x es un hombre, entonces x es mortal" expresa una proposición, a saber, la proposición que también puede ser expresada por "Todos los hombres son mortales"

No es fácil en modo alguno determinar precisamente la naturaleza de una función proposicional En *Principia mathematica*, Russell da la siguiente explicación

> Al decir "función proposicional" significamos algo que contiene una variable x y expresa una *proposición* tan pronto como a x se le asigna un valor Es decir, una función proposicional difiere de una proposición solamente por el hecho de que es ambigua: contiene una variable cuyo valor no está asignado Concuerda con las funciones ordinarias de las matemáticas en el hecho de que contiene una variable que no está asignada; en lo que difiere es en el hecho de que los valores de la función son proposiciones [23]

En esta afirmación, Russell hace hincapié en la *ambigüedad* de una función proposicional y asevera que esta ambigüedad constituye la única diferencia entre una función proposicional y una proposición Esta parece ser una manera poco afortunada de expresar el asunto Al decir "ambigüedad", Russell parece significar *indeterminación,* que es la característica de la variable Decir que una expresión que contiene una variable es una expresión *ambigua,* implica un uso engañoso del lenguaje Lo importante es que hay una correspondencia determinada especificada por la relación funcional que rige entre las variables Ya hemos visto que ésta es la característica de una función matemática Russell distingue más adelante entre una función proposicional y un

[22] *The monist,* 1919, p 192 Debe observarse que Russell usa comillas para señalar una *proposición* que ocurre en otra afirmación, de suerte que escribe "Todos los griegos son hombres" donde nosotros escribiríamos *Todos los griegos son hombres* Russell no siempre logra hacer clara la distinción entre la *expresión* y *lo que es expresado*

[23] *Op cit*, vol I, p 38

valor indeterminado (o, como él dice, ambiguo) de la función Para señalar esta distinción, él escribe "$\hat{x}$ está lastimado" para expresar la función proposicional, y "x está lastimado" para expresar el valor indeterminado de la función [24] Más adelante nos ocuparemos en esta distinción

Ahora tenemos que considerar en qué aspectos una función proposicional se parece a, y en qué aspectos difiere de, una función matemática ordinaria En el pasaje citado, Russell señala que concuerdan en que contienen variables no asignadas y difieren en que los valores de una función proposicional son proposiciones Esto, sin embargo, no parece ser una explicación lo suficientemente precisa del asunto Russell dice también que "las funciones proposicionales son la clase fundamental de la que se derivan las clases más usuales de función, tales como 'sin *x*', o 'log *x*', o 'el padre de *x*' " [25] Tales funciones reciben el nombre de *funciones descriptivas*; ellas significan que "el término tiene tal o cual relación con *x*", de modo que la función *describe* el valor de *x* que satisface la función Así, log *x* significa "el logaritmo de *x*" Si sustituimos el valor determinado 3 en lugar de *x* en la expresión "log *x*", obtenemos "el logaritmo de 3" Ahora bien, "el logaritmo de 3" *describe* el número 4771 , "el logaritmo de 2" *describe* el número 3010 , del mismo modo que "el padre de Jorge V" describe a Eduardo VII Es importante distinguir *el número descrito* de *su descripción*, puesto que el *mismo* número puede tener muchas descripciones diferentes, al igual que el *mismo* hombre puede tener muchas descripciones diferentes que le sean aplicables Por ejemplo, *el número* 2 puede ser descrito como "el único primo par", "la raíz cuadrada de 4", "la suma de 1 y 1", Eduardo VII puede ser descrito como "el sucesor de la Reina Victoria", "el Rey de Inglaterra en 1905", etc En la función matemática $y = \log \hat{x}$, *y* es, como hemos visto, *el valor de la función*, y si *x* fuera sustituida por 3, entonces *el valor del valor de la función es* 4771

Debemos considerar ahora una función proposicional, por ejemplo, "x está lastimado" Si sustituimos un valor determinado, por ejemplo, "este muchacho", por "x", obtenemos la proposición *Este muchacho está lastimado* En este caso, entonces, tenemos una proposición, no una descripción, pues resulta claro que *Este muchacho está lastimado* es o verdadero o falso, y no describe nada Por lo tanto, en el caso de una función proposicional no hay nada análogo al término descrito en el caso de la función matemática Frege, empero, supuso que sí lo había Una breve consideración de su concepción puede permitirnos ver exactamente en qué difieren las dos clases de funciones que hemos estado examinando Frege pensó que toda proposición era una descripción que describía o *lo verdadero* o *lo falso* De tal suerte, sostuvo que tanto "$2^2 = 4$" como "$3 > 2$" describen *lo ver-*

[24] La expresión "$\hat{x}$ está lastimado" puede leerse "x *gorra* está lastimada"
[25] *Op cit*, p 15

dadero, del mismo modo que "2^2" describe a 4 [26] De aquí que la expresión funcional "$x^2 = 4$" tendría, según la concepción de Frege, sólo dos valores, a saber, *lo verdadero* para un argumento, viz 2, *lo falso* para todos los argumentos, viz 1^2, 3^2, 4^2, etc Esta concepción ciertamente parece errónea Está ligada con una teoría acerca del "significado" y la "denotación" que no podemos examinar aquí [27] Pero vale la pena tomar nota de la concepción de Frege porque, si fuese correcta, entonces las funciones proposicionales serían exacta mente análogas a las funciones matemáticas Si la concepción de Frege fuese correcta, podríamos escribir "$y = x$ está lastimado", y entonces y sería la variable dependiente, del mismo modo que en "$y = \log x$" En el caso de la función proposicional, "y" podría tener sólo *dos* va lores, a saber, *lo verdadero* y *lo falso* Frege dio a estos valores el nombre de "valores de verdad", a saber, *verdad* cuando la proposición obtenida mediante la sustitución de valores determinados es *verdadera*, *falsedad* cuando es *falsa* Así, pues, si en la expresión "$y = x$ está lastimado" fuésemos a sustituir "este muchacho", y si fuera verdadero *que este muchacho está lastimado,* entonces "$y = x$ está lasti mado" tendría el valor de verdad *verdad* con el argumento *este mu chacho,* si no fuera el caso que este muchacho está lastimado, entonces "$y = x$ está lastimado" tendría valor de verdad *falsedad* con el argu mento *este muchacho* Según la concepción de Frege, entonces los valores de verdad de "x está lastimado" estarían relacionados con "está lastimado" del mismo modo que los valores de log x están re lacionados con la función *log* Pero éste no es el caso Concluimos, por lo tanto, que no hay nada en la función proposicional análogo a "x está lastimado" del modo que y es análogo a "$\log x$" en la fun ción matemática "$y = \log x$" Así, pues, las dos clases de función no son exactamente análogas

En el caso de una función proposicional, pues, parece que no hay nada correspondiente al valor de la función, puesto que no hay nada correspondiente al término descrito por la función matemática descriptiva Pero sí hay algo de lo cual puede decirse, en cierto sentido, que toma su lugar Para ver esto debemos volver a la distinción entre la función proposicional "$\hat{x}$ está lastimado" y el valor indeterminado de la función "x está lastimado" Será conveniente escribir "Φ" por "está lastimado", de manera que las dos expresiones se conviertan en "$\Phi\hat{x}$" y "Φx" Φx puede considerarse como una proposición variable, es aquello que la función $\Phi\hat{x}$ denota indeterminadamente, en tanto que $\Phi\hat{x}$ es aquello que denota a Φx indeterminadamente Russell diría que Φx hace una afirmación indeterminada acerca de cualquier valor de $\Phi\hat{x}$ mientras que $\Phi\hat{x}$ hace una aseveración acerca de una indeter-

[26] Véase FREGE, *Function und Begriff*, p 13; *Ueber Sinn und Bedeutung*, p 32

[27] Para un examen de la teoría de FREGE, véase RUSSELL, *Principles of mathematics*, Apéndice A FREGE sostenía que las descripciones eran *nombres propios* para *lo verdadero* y *lo falso*

minación [28] Ahora bien, la proposición indeterminada, o variable, Φx es, en cierto sentido, dependiente de la variable x Expresa *algo que tiene la propiedad* Φ $\Phi\hat{x}$ expresa *la propiedad que algo tiene* Por lo tanto, $\Phi\hat{x}$ corresponde, en cierto sentido, al *log*, es decir, la función; Φx corresponde al número del cual algo es el log, es decir, al valor indeterminado La proposición variable Φx *es*, sin embargo, realmente análoga a la descripción variable "el log de x"; no es análoga al número variable y que "el log de x" describe No podemos, pues, considerar que la función proposicional tiene algo exactamente correspondiente a la variable dependiente en la expresión "$y = \log x$"

§ 4 *Ilustraciones tomadas del simbolismo de Principia Mathematica*

Hemos visto que un simbolismo satisfactorio debe ser preciso, sistemático y conciso El uso de símbolos precisos, es decir, bien definidos y por lo tanto no ambiguos, constituye una ayuda para el análisis de las nociones que los símbolos expresan Un simbolismo conciso nos permite expresar breve y claramente afirmaciones que serían innecesariamente complicadas y prolijas si se expresaran en el lenguaje ordinario En *Principia mathematica*, Russell y Whitehead han elaborado un simbolismo que satisface estos requisitos [29] En esta sección explicaremos este simbolismo en la medida en que es necesario para su utilización en el análisis de las descripciones y las clases

Ya hemos usado minúsculas latinas *cursivas* para expresar las variables que ocurren en formas proposicionales, por ejemplo: "x es p". También hemos empleado mayúsculas latinas para expresar relaciones, por ejemplo R, S También hemos usado, en el capítulo IV, las minúsculas p, q y r para expresar proposiciones indeterminadas, es decir proposiciones variables Ahora sistematizaremos este uso de la siguiente manera:

Variables (i) Minúsculas latinas tomadas del final del alfabeto se usan para expresar individuos variables: x, y, z, (ii) las minúsculas p, q, r expresan proposiciones variables

Funciones proposicionales Las mayúsculas griegas Φ, Ψ y X se usan para expresar funciones variables que incluyen una variable, por ejemplo "$\Phi(x)$", "$\Psi(x)$" Usualmente resulta conveniente omitir los paréntesis alrededor de la variable, y así escribimos "$\Phi(x)$" como "Φx" Las funciones proposicionales que incluyen dos o más variables pueden escribirse "$\Phi(x, y)$", "$\Phi(x, y, z)$" Pero por lo común es más conveniente expresar una función que incluya dos variables mediante

[28] Véase *Principia mathematica*, vol I, pp 40 41 RUSSELL emplea la palabra "ambiguo" donde yo he empleado "indeterminado" Si diéramos a x un valor, representado por la constante a (o sea, un valor del *argumento* x), entonces Φa es un valor de Φx, y es un valor para $\Phi\hat{x}$

[29] El simbolismo de *Principia mathematica* está basado en el de Peano (Véase capítulo X, § 5, y *cf* capítulo XXV, § 3 más adelante)

los símbolos para relaciones, de la siguiente manera: "x R y" Ya es tamos familiarizados con la expresión simbólica de la forma propo sicional exhibida en cualquier proposición relacional diádica

Pertenencia a una clase La relación *es un*, que denota pertenencia a una clase, es simbolizada por la minúscula griega ε Ésta fue escogida por Peano por ser la primera letra de la palabra griega ἐστί, que significa "es" Así, ε expresa el "es" que denota pertenencia a una clase, no el "es" que expresa predicación

Clases variables Las minúsculas griegas α, β, γ se usan para ex presar una clase variable Así, si queremos hablar acerca de cualquier clase y no acerca de una clase particular dada, usamos α; si queremos hablar acerca de cualquier *otra* clase, pero no de una clase dada, usamos β, y así sucesivamente Si queremos hablar acerca de un miembro variable de una clase α, expresamos "x es miembro de la clase α" mediante "$x \varepsilon \alpha$" Así, "$x \varepsilon \alpha$" es la forma proposicional de las proposiciones de pertenencia a una clase

Proposiciones elementales compuestas Ya hemos distinguido cuatro clases de proposiciones compuestas, relacionadas de tal modo que cualquier proposición expresada en una de las formas podría ser ex presada, con modificaciones adecuadas, en las otras formas Ahora sim bolizaremos estas formas, usando la terminología de *Principia mathematica* Se recordará que cada una de la formas combinadas puede ser contradicha por una proposición conjuntiva Necesitamos un sím bolo para expresar la negación El símbolo que se usa es $\sim$ Así, la negación de "p" se expresa con "$\sim p$" De tal suerte, "$\sim p$" puede leerse como "*no-p*"

Proposiciones combinadas

(i) "Si p, entonces q" será simbolizada por "$p \supset q$"

El símbolo "$\supset$" expresa "implica" de manera que "$p \supset q$" puede leerse como "p implica q"

(ii) "O bien p o bien q" será simbolizado por "$p \vee q$"

El símbolo "$\vee$" expresa "o bien", de manera que "$p \vee q$" puede leerse como "p o bien q" Hemos usado hasta aquí el nombre "alternativa" para expresar proposiciones combinadas de esta forma Pero los lógicos matemáticos usan el nombre "disyuntiva" en vez de "alternativa", y nos resultará conveniente adoptar su terminología [80]

Proposiciones compuestas La proposición conjuntiva "p y q" será simbolizada por "$p \cdot q$" El punto expresa que ambas proposicio-

[80] Esta terminología es desafortunada, puesto que "o" expresa "uno u otro" sin excluir la posibilidad de ambos; por lo tanto, *o* no *disyunta* las proposiciones conectadas por medio del mismo *o*

nes son aseveradas juntas [81] Por lo tanto, "*p* *q*" puede leerse como "Ambas *p* y *q*"

La proposición disyuntiva "*p* v *q*" puede considerarse como la negación de una proposición conjuntiva, de modo que, usando el simbolismo que acabamos de explicar, podemos expresar "o bien *p* o bien *q*" por "$\sim(\sim p \quad \sim q)$" No necesitamos, por lo tanto, un símbolo adicional para expresar "no ambas" Podríamos empezar, o bien con disyunción o bien con conjunción, y definir la una en términos de la otra Así podemos *definir* la proposición conjuntiva "*p* *q*" como la negación de la proposición disyuntiva "o bien no-*p* o bien no *q*" Expresada en este simbolismo, esta definición es:

$$p \quad q \quad = \quad \sim(\sim p \vee \sim q) Df$$

El símbolo " = *Df*" representa "es el equivalente definido de" El símbolo "=" debe ser tomado en conjunción con "*Df*" que está escrito al final de la expresión al lado derecho de "=" Debe observarse que en esta expresión los *puntos* se usan de dos maneras: primero, para simbolizar una conjunción de proposiciones; segundo, para servir de paréntesis, mostrando que una expresión compleja ha de ser tratada como una expresión *simple* Así, los puntos se usan para servir a manera de paréntesis en las expresiones algebraicas El uso correcto de los paréntesis es muy importante Una ilustración sencilla tomada del álgebra elemental lo mostrará claramente

Compárese $\sqrt{a} + x$

con $\sqrt{a + x}$

La primera expresión significa que *x* debe ser sumada a la raíz cuadrada de *a*; la segunda expresión significa que *x* debe ser sumada a *a* y que la raíz cuadrada del total va a ser derivada En un simbolismo lógico se necesita un recurso similar En el lenguaje hablado, la distribución de los paréntesis se indica por el tono de la voz o por las pausas Para los fines lógicos, necesitamos un modo sistemático de indicar qué es lo que ha de considerarse como una expresión simple Los paréntesis exteriores se indican con un mayor número de puntos Este uso de los puntos lo explicaremos cuando tratemos las expresiones en que se les usa así

A menudo queremos decir que dos proposiciones son *equivalentes* en el sentido de que, aunque son proposiciones diferentes, si una de ellas es verdadera, la otra también lo es, y a la inversa Éste es el sentido que dimos a *equivalencia* —o "coimplicación", para emplear

[81] La conjunción de *p* y *q* se llama su *producto lógico*, puesto que es análogo a un producto algebraico En consecuencia, algunos lógicos escriben la proposición conjuntiva dada arriba como "*pq*"

el término de Johnson— en el capítulo VII La "equivalencia" es simbolizada por "$\equiv$" Así obtenemos la expresión

$$“p \equiv q \quad = \quad p \supset q \quad q \supset p\ Df$$

Debe observarse que el punto a la izquierda de = muestra que la totalidad de lo que lo antecede es definido por la totalidad de lo que sigue al punto a la derecha de "=", en tanto que el punto entre q y q es el símbolo de la conjunción lógica Esta expresión puede leerse como " 'p es equivalente a q' es el equivalente definido de 'p implica q' y 'q implica p' "

Proposiciones no-elementales Una función proposicional puede ser afirmada como verdadera para todos sus valores, o para algunos de sus valores; o, de la misma manera, puede ser afirmada como falsa Por lo tanto, necesitamos símbolos para expresar "verdadera para todos los valores de la variable", "verdadera para algunos valores de la variable" Esto se expresa como sigue:

"Φx es siempre verdadera" es expresada por "$(x) \quad \Phi x$"

"Φx es algunas veces verdadera" es expresada por "$(\exists x) \quad \Phi x$"

Así, "(x)", en "$(x) \quad \Phi x$", puede leerse como "para todos los valores de x" La mayúscula invertida en "$(\exists x) \quad \Phi x$" puede leerse como "Hay una x tal que "[82] La expresión completa puede leer se como "Hay una x tal que Φx es verdadera", y esta expresión es equivalente a "Φx es algunas veces verdadera"

Negar que Φx es siempre verdadera es equivalente a afirmar que la negación de Φx es algunas veces verdadera En nuestro simbolismo, esto puede ser expresado por "$(\exists x) \sim \Phi x$", que puede leerse como "Hay una x tal que '$\sim\Phi x$' es algunas veces verdadera", o como "$\sim\Phi x$ es algunas veces verdadera" De manera similar, "Φx es siem pre falsa" puede ser expresada por "$\sim\Phi x$ es siempre verdadera", es decir, por

$$(x) \quad \sim\Phi x$$

Las expresiones "$(x) \quad \Phi x$" y "$(\exists x) . \Phi x$" contienen funciones proposicionales que incluyen variables aparentes No existe diferencia en significado entre "$(x) \quad \Phi x$" y "$(y) \quad \Phi y$" En cada caso, la minúscula latina representa una variable aparente

Algunas veces queremos decir que un valor, y sólo un valor, satis face una función proposicional dada Esto se expresa de la siguiente manera:

"$(\iota x) \ (\Phi x)$", que puede leerse como "el término que satisface a Φx" Cuando queremos hablar de *todos los términos* que satisfacen

[82] Se observará que la relación expresada por $(\exists x)$ es la *inversa lógica* de la relación expresada por ε, lo cual probablemente explica la elección de una e invertida como la inversa *gráfica* de ε

una función, usamos la expresión "$\hat{x}(\Phi x)$", que puede leerse como "los términos que satisfacen a Φx" o "las x tales que Φx es verdadera"[33]

"El" o "la" en singular se emplea a menudo para expresar una descripción aplicable a un objeto solamente, por ejemplo: "el hombre más rico del mundo" Tales expresiones se usan con frecuencia, de modo que resulta útil tener una expresión simbólica concisa como el símbolo antes mencionado "$(\iota x)\ (\Phi x)$" Si queremos decir que el término que satisface a "Φx" existe, usamos el símbolo

$$\text{“}E!(\iota x)\ (\Phi x)\text{”},$$

que puede leerse como "El término que satisface a Φx existe"

Puesto que "$(\exists x)\quad \Phi x$" significa "Hay una x tal que Φx es verdadera", es conveniente escribir

"$(\exists c)\quad \Phi x$" para expresar "Hay un *objeto* c tal que Φx es verdadera cuando c sustituye a x"

Aquí, c expresa una constante desconocida, a saber, un valor de x, que satisface a "Φx" Esta expresión no significa que hay *sólo un* objeto c tal que Φx es verdadera cuando c sustituye a x, sino que hay *cuando menos un* objeto tal

Con la ayuda de esta expresión podemos definir la expresión "$E!\ (\iota x)\ (\Phi x)$" de la siguiente manera:

$$E!\ (\iota x)\ (\Phi x) \quad = \quad (\exists c) \quad \Phi x \quad \equiv_x \quad x = c \quad Df$$

Esta expresión completa debe leerse como·

" '*El término que satisface a* Φx' *existe*" es la equivalente definida de "*Hay un objeto* c *tal que* Φx *es verdadera cuando* x *es* c *y no de otra manera*"

Por lo que se refiere a los símbolos utilizados en la expresión a la izquierda, debe observarse que "$=$" en "$x = c$" significa "es idéntico a" Este símbolo no debe confundirse con "$= \quad Df$", que significa "*es equivalente por definición*", o sea, "*es el equivalente definido de*" También debe observarse que la x suscrita después de "$\equiv$" sinifica "para todos los valores de x" De tal suerte, si quisiéramos decir que dos funciones proposicionales son equivalentes, podríamos expresarlo así:

$$\text{“}\Phi x \quad \equiv_x \quad \Psi x\text{”},$$

que podría leerse "Φx es equivalente, para todos los valores de x, a Ψx" Esto también podría expresarse con el símbolo usado antes, a saber:

$$\text{“}(x) \quad \Phi x \quad \equiv \quad \Psi x\text{”}$$

[33] Así, "$\hat{x}(\Phi x)$" expresa "la clase definida por Φx", donde Φx sería la función y Φx un valor indeterminado de la función

Puesto que ya tenemos el símbolo $\supset$ para "implica", podemos ver que "Φx implica Ψx" será expresado por

$$``\Phi x \quad \supset \quad \Psi x\ "$$

Si queremos decir que, para todos los valores de x, esta explicación rige, podemos expresarlo mediante

$$``\Phi x \quad \equiv_x \quad \Psi x",$$

o mediante

$$``(x) : \Phi x \quad \supset \quad \Psi x"$$

Un examen de las diversas expresiones simbólicas que hemos dado mostrará cómo se usan los puntos para poner entre paréntesis las expresiones Así, por ejemplo, en la expresión

$$\text{E!}\ (\iota x)\ (\Phi x) \quad = : (\exists c) : \Phi x \quad \equiv_x \quad x = c\ Df$$

los dos puntos después de $(\exists c)$ muestran que *todo* lo que *sigue* pertenece a $(\exists c)$ Como ejemplo adicional, podemos contrastar

$$p \vee q \quad \supset \quad q \vee p \qquad \text{(i)}$$

$$\text{con} \quad p \vee q \quad \supset \quad q : \vee \quad p \qquad \text{(ii)}$$

Aquí, (i) significa "'p o q' implica 'q o p' ",

(ii) significa "o bien 'p o q' implica q, o bien p es verdadera" [84]

[84] El estudiante hallará una introducción útil a este tema en el artículo del profesor L J RUSSELL sobre "An elementary symbolism for logic" (*Mind*, enero de 1928)