APÉNDICE A

SIGNIFICADO, REFERENCIA Y DESCRIPCIÓN

Las palabras "significado" y "significa" adolecen tanto de ambigüedad nociva como de ambigüedad sistemática Podemos evitar la primera si tenemos el cuidado de recordar que sólo las palabras o los símbolos tienen *significado* Una palabra es un signo convencional, un sonido o una forma con color —es decir, una señal— utilizada por alguien para referirse a algo *Significa*, o *simboliza*, es una relación triádica, sus tres términos son: (i) el sonido o señal, (ii) la persona que utiliza el sonido o señal, (iii) aquello a lo que se hace referencia Puesto que las personas que hablan un lenguaje dado (el español, por ejemplo) frecuentemente utilizan cierto sonido específico (mesa, por ejemplo) con la *misma* referencia, pensamos en el *sonido* como la *palabra* Del mismo modo, la señal escrita, que puede aparecer en las páginas de un diccionario, viene a ser confundida con *la palabra*, y así decimos que podemos "buscar *el significado de la palabra* en el diccionario" La comparativa fijeza de la referencia, tal como la suponen quienes utilizan comúnmente el sonido o la señal, hace que sea natural e inteligible para nosotros hablar de *el significado de la palabra* y, al mismo tiempo, pensar en la palabra como la señal, o su equivalente, el sonido Esta expresión natural no debe, sin embargo, hacernos caer en el error de suponer que el *significado* está ligado a *uno* cualquiera de los tres términos en la relación triádica *significa*, el *significado* está ligado al sonido (o señal) tal como lo utiliza alguien para referirse a algo Del mismo modo que podemos decir "Esta pluma-fuente es un regalo", podemos pensar en un elemento en la relación triádica *significa* como si tuviera *significado*. Pero comprendemos que *Esta pluma* no es un *regalo* a menos que sea *regalada* por un *donante* a un *recipiente*; del mismo modo debemos comprender que un *sonido* (o *señal*) no tiene *significado* a menos que sea *utilizado por alguien para referirse a algo* No hay *un* elemento en la relación triádica *significa* que *tenga significado* Por lo tanto, cuando decimos que la *palabra* tiene significado, entonces *la palabra* no debe ser identificada con el sonido (o la señal), será el sonido (o la señal) tal como se le utiliza para referirse a algo Aquello a lo que se refiere la palabra es *el referendo*. El referendo de un símbolo demostrativo (o sea, una palabra usada demostrativamente) es *el objeto directamente presentado al* hablante. El referendo de una frase descriptiva es una *propiedad* o *conjunto de propiedades* Cuando estas propiedades *pertenecen* a un objeto, entonces puede decirse que la frase descriptiva *tiene aplicación*, es decir, que es aplicable al objeto que posee esas propiedades Cuando una frase descriptiva es un elemento en una descripción definida o indefinida, entonces la frase descriptiva es utilizada como una frase *denotativa* Una frase descriptiva siempre *describe* (de aquí la expresión "frase descriptiva"), pero cuando la frase descriptiva no tiene denotación, entonces no describe nada [1] Sin embargo, si hay objetos que tienen las propiedades adjudicadas por la frase descriptiva, entonces estos objetos son *denotados* por ella En el caso de un símbolo demostrativo, el referendo *es* la denotación, pero en el caso de una frase descriptiva, la denotación (si es que hay alguna) es el objeto o conjunto de objetos que *tienen* las propiedades, en tanto que el referendo es las *propiedades* De consiguiente, cuando hablamos de "el significado de un símbolo demostrativo" y de "el significado de una frase descriptiva", estamos usando "significado" en dos sentidos diferentes El símbolo demostrativo *significa* su denotación, es decir, representa el objeto denotado, mien tras que la frase descriptiva *significa* las propiedades y no el objeto (si alguno hay) denotado De consiguiente, como ha señalado Russell, "no hay una relación de significado entre las palabras y lo que ellas representan, sino tantas relaciones de significado, cada una de un tipo lógico diferente, como tipos lógicos haya entre los objetos para los que hay palabras" [2] Por consiguiente, tanto "significa" como "representa" tienen ambigüedad sistemática

Debe observarse también que un *símbolo* y *lo que él representa* siempre son de tipos lógicos diferentes La palabra "palabra" no significa la señal o el sonido, significa, o representa, las propiedades que *tiene* cualquier cosa que sea una *palabra*

La manera en que una *palabra significa* es diferente de la manera en que una *oración significa* Una oración está compuesta de palabras, pero la forma sintáctica de la oración no es otra palabra, y, a fin de entender la oración, esta forma, así como las palabras separadas, deben ser entendidas Nuestro conocimiento de las formas sintácticas de un idioma que nos es familiar nos puede permitir entender el sentido de una oración aun cuando no entendamos todas las palabras separadas; pero podríamos conocer todas las palabras y, sin embargo, no entender la oración Para citar una vez más a Russell: "Podríamos entender todas las palabras separadas de una oración sin entender la oración; si la oración es larga y complicada, es probable que esto suceda En semejante caso tenemos conocimiento de los constituyentes sin tener conocimiento de la forma También es posible

[1] Debemos tener el cuidado de no decir que *las propiedades son aplicables*; las propiedades *pertenecen*; son las frases descriptivas las que son *aplicables*

[2] *Contemporary British Philosophy, Series I*, p 370

tener conocimiento de la forma sin tener conocimiento de los cons tituyentes A fin de entender una oración, es necesario tener cono cimiento tanto de los constituyentes como del caso particular de la forma Es de esta manera como una oración transmite información, puesto que nos dice que ciertos objetos conocidos están relacionados según cierta forma conocida" [8]

Puede decirse que las oraciones *expresan* proposiciones Se dice algunas veces que la proposición expresada es lo que la oración *significa* Aquí, una vez más, "significa" se usa de manera diferente, pues la relación de una oración con lo que ella expresa es típicamente diferente de la relación de una palabra con su referendo Puede decirse que una oración española y una oración francesa (si la una es una equivalente transliteral de la otra) expresan la misma proposi ción o tienen el mismo significado En el lenguaje ordinario las ora ciones se usan de tal modo que tengan una *referencia* a los hechos Si la oración se usa para decir lo que es verdadero, entonces hay un hecho, o un conjunto de hechos, al cual o a los cuales la oración *se refiere* y que hace que lo dicho sea *verdadero* La referencia de to das las oraciones que usamos es indirecta, sólo una oración pictórica podría *expresar* el hecho que hace que la oración sea susceptible de ser usada de modo que diga lo que es verdadero La referencia de las oraciones es indirecta, del mismo modo que el uso de los símbolos es descriptivo más bien que demostrativo Un símbolo descriptivo implica necesariamente cierto grado de generalidad y abstracción De consiguiente, la noción de una oración pictórica es una aproximación ideal a un límite No es accidental el que no podamos usar las oraciones pictóricamente Todo lo que es posible es disminuir el alejamiento de la pictoricidad.

Como ya hemos visto, las expresiones ordinarias son lógicamente inadecuadas Cuando traducimos una oración a una expresión lógicamente menos inadecuada, podemos decir que estamos reduciendo el alejamiento de la pictoricidad Este avance en claridad puede expresarse de otro modo diciendo que sustituimos la primera oración por otra oración que se aproxima más a la multiplicidad correcta Una oración que expresa un hecho tiene la misma multiplicidad que el hecho que expresa cuando los elementos de la oración pueden colocarse en una correspondencia de uno-uno con los elementos del hecho Tal oración revelaría la forma del hecho expresado

[8] *Our knowledge of the external world*, pp 43 44

APÉNDICE B

CONSTRUCCIONES LÓGICAS

LA IMPORTANCIA de la teoría de los símbolos incompletos de Russell consiste en que nos hace ver cuán indirecta es la referencia de las oraciones que usamos a los hechos a que nos proponemos referirnos cuando las usamos Es natural suponer que hay una correspondencia de uno-uno entre los elementos de una oración y los constituyentes de algún hecho Esta ilusión se disipa cuando prestamos atención a palabras tales como "el", "cualquier", "un", pero persiste la creencia de que "esta mesa", tal como se usa en "Esta mesa es negra", se refiere directamente a un constituyente de un hecho En el capítulo IX mostramos que esta creencia es falsa, su persistencia se debe a la falta de comprensión de cuán lógicamente inadecuadas son nuestras expresiones lingüísticas ordinarias

Resulta difícil dar ejemplos claros de construcciones lógicas, pues la afirmación, por ejemplo, de que *esta mesa es una construcción lógica* es una afirmación metafísica Aceptar la afirmación es aceptar cierto análisis metafísico Debe ser posible, empero, decir qué significamos al afirmar que algo es una construcción lógica aun cuando luego procedamos a negar que tal afirmación jamás sea verdadera He tratado de hacer esto en el capítulo IX Aquí me interesa señalar que hay buenas razones para suponer que los objetos familiares de la vida cotidiana, incluidas las personas, son construcciones lógicas Una de las dificultades para aceptar esta concepción se debe, a mi juicio, a una mala interpretación de la expresión "construcción lógica" No cabe duda de que ésta es una expresión desafortunada, pues sugiere ciertamente que algo es *construido*, lo cual no es el caso, y que la *lógica* es adecuada a la construcción, lo cual también es falso El hábito de Russell de usar "ficciones lógicas" como sinónimo de "construcciones lógicas" empeora las cosas La expresión "ficciones lógicas" sugiere algo ficticio[1] Pero decir que la mesa es una ficción

[1] Este ha sido un error común de los críticos de Russell, y es un error al que se presta una gran parte de lo que dice Russell Véase A O LOVEJOY, *The revolt against dualism*, p 199 *Cf* mi artículo sobre "Substances, events, and facts", *Journal of Philosophy*, 9 de junio de 1932

(o construcción) lógica, no es decir que la mesa es un objeto ficticio o imaginario, es más bien negar que, en cualquier sentido ordinario, es del todo un objeto

Creo que es posible aprehender más claramente lo que significa "esta mesa es una construcción lógica" si consideramos cómo parece haber llegado Russell a esta concepción Me parece que dos líneas de reflexión diferentes convergieron en esta conclusión Por una parte, Russell estaba interesado en analizar las proposiciones generales; por otra parte, trataba de descubrir un hecho simple que pudiera considerar como un dato indudable A primera vista, la conexión entre estos dos problemas parece absurdamente remota, pero cuando recordamos que Russell vino a sostener que una *mesa* es una *clase* de apariencias, la conexión se hace más obvia No disponemos aquí de espacio para ocuparnos extensamente de estas consideraciones, pero podemos señalar algunos de los puntos más importantes

El análisis de las proposiciones generales tales como *Los hombres son mortales* se encuentra en el capítulo IX Aquí es suficiente recordar que "hombres", tal como se usa en "los hombres son mortales", se refiere a cada hombre individual indirectamente a través de la propiedad de *ser humano*, por lo tanto, su significación no depende del conocimiento directo de cada hombre individual Si la *mesa* es una clase de *apariencias*, entonces, al decir "Esta mesa es negra", se hace referencia a cada miembro de la clase, aunque el hablante tenga conocimiento directo de un miembro solamente, a saber, *la* apariencia sensorialmente presente ante él y que Russell llama un "dato sensorial" Esta línea de reflexión conduce a la conclusión de que *la mesa* no es la *especie* de objeto que podría ser presentado directamente, de modo que no se podría hacer referencia demostrativa a *la mesa* Russell, como señalamos en el capítulo IX, parece suponer que decir que un símbolo es incompleto es decir que no *nombra* un constituyente de la proposición en cuya expresión verbal aparece, de modo que, del hecho de que *la mesa* no podría ser *nombrada*, él derivaría la conclusión de que *la mesa* es una construcción lógica

La segunda línea de reflexión surge en la búsqueda de un dato indudable Podemos equivocarnos, en cualquier caso dado, al creer que estamos viendo una *mesa*, pues podemos ser víctimas de ilusiones o alucinaciones Pero, aun en tales casos, el perceptor está consciente de un elemento sensorial, y Russell sostiene que en relación con el elemento sensorial —o, como diría él, el dato sensorial—, la duda es imposible [2] Los datos sensoriales han de ser considerados como elementos en hechos simples, que Russell llama "hechos del sentido" Estos constituyen "datos duros", es decir, datos "que resisten la influencia disolvente de la reflexión crítica" Las mesas, las personas y las *cosas* familiares ordinarias no resisten esta influencia disolvente De consiguiente, Russell buscó un método para prescindir del supues-

[2] Véanse *Our knowledge of the external world*, p 70; *Outline of philosophy*, pp 4 5

to de que hay mesas sin impedirnos seguir hablando acerca de las mesas. En suma, Russell considera el problema de la naturaleza del objeto externo, por ejemplo, *la mesa*, primordialmente como un problema de justificación de una inferencia *La mesa*, parece suponer Russell, se alcanza por medio de una inferencia, pero todas las inferencias concernientes a aquello que no es puramente formal, están sujetas a la duda, por lo tanto, Russell trata de justificar la inferencia En cierta época (1912) [3] Russell sostuvo que *la mesa* era conocida por medio de la descripción como "La cosa que tiene R para este dato sensorial" (donde "R" representa la conversa de la relación *ser una apariencia de*.) Pero una descripción puede no describir nada, y sin embargo ser significativa. El siguiente paso de Russell consistió en aplicar la Navaja de Occam para separar *la mesa* Su formulación de la Navaja —"Dondequiera que sea posible las entidades inferidas sean sustituidas por posibles construcciones lógicas" [4] —es significativa al revelar su actitud La oposición de *construcciones lógicas* y *entidades inferidas* muestra que Russell consideraba el problema esencialmente como un problema de justificación de una inferencia arriesgada A esto se debe sin duda la engañosa expresión "construcciones lógicas"

Una tercera consideración puede haber llevado a Russell a hacer algunas de sus afirmaciones engañosas acerca de las construcciones lógicas Russell aceptó el método de la abstracción extensiva de Whitehead como un método satisfactorio para construir *puntos*. Supuso entonces que el mismo método podía ser utilizado de la misma manera para construir *mesas* Pero en favor de la concepción de que los puntos son *construcciones* pueden esgrimirse razones que están ausentes en el caso de las mesas. Estas razones son iguales que las que pueden esgrimirse en favor de la concepción de que la "materia" es una "expresión conveniente" que puede considerarse *definida* para los fines de la investigación física. Esto mismo no rige en relación con *mesas* No puede haber duda de que hay *mesas*; la duda surge en relación con la dificultad de determinar cuál es el análisis correcto de las proposiciones en cuya expresión verbal aparece "mesa" Al no lograr hacer claras estas consideraciones, Russell ha oscurecido el análisis de *La mesa es una construcción lógica*.

El punto que debe subrayarse es que toda afirmación de la que comúnmente se diría que es una afirmación acerca de *la mesa* puede ser transformada en un conjunto de afirmaciones capaz de sustituir conjuntamente la afirmación original, pero ningún elemento gramatical en el conjunto sustitutivo será *usado con el mismo significado* como en cualquier elemento gramatical en la expresión verbal de la afirmación original [5] Un ejemplo puede ser suficiente para mostrar

[3] Véase *Problems of philosophy*

[4] *Mysticism and logic*, p 155 Este ensayo fue publicado por primera vez en enero de 1914

[5] Véase J. WISDOM, "Logical constructions", *Mind*, N S, 158. Los artículos de Wisdom sobre este tema, que todavía no han sido concluidos, serán del mayor provecho para los estudiantes avanzados

esto Podemos decir que un Colegio, o el Consejo de un Colegio, o un Comité o una Nación han obrado de cierta manera Así, por ejemplo, podemos decir "El Consejo ha elegido a A como Presidente" Esta afirmación dice *algo* acerca de cada miembro del Consejo, pero no dice acerca de cada miembro que *él* eligió a A Pero podría hallarse un conjunto de afirmaciones, conjuntamente equivalentes a la afirmación original, que serían, cada una, una afirmación acerca de un miembro individual La acción del Consejo es una construcción lógica a partir de un conjunto de hechos, cada uno de los cuales es un hecho acerca de un miembro individual; pero la acción del Consejo no es la suma de las acciones de los miembros Wisdom ha seña lado que consideraciones similares rigen en relación con el análisis de afirmaciones tales como "Francia le teme a Alemania" Palabras tales como "teme", "obra", "son" tienen ambigüedad sistemática Por lo tanto, debemos tener el cuidado de no suponer que estamos diciendo precisamente la misma cosa cuando decimos que *un comité obra* y cuando decimos que *una persona obra*

Hay, además, diferentes *tipos* de construcciones lógicas Hay cons trucciones lógicas derivadas de hechos acerca de constituyentes simples; construcciones derivadas de hechos concernientes a estos hechos, y así sucesivamente Este problema de los tipos de construcciones ló gicas está íntimamente relacionado con el problema de la naturaleza y las clases de la abstracción Hay mucho trabajo por hacer en relación con este problema, pero no podemos examinarlo aquí

Queda por eliminar un malentendido muy generalizado Se ha su puesto erróneamente que de las dos afirmaciones *Estoy sentado en esta silla* y *Esta silla es una construcción lógica,* se desprende *Estoy sentado en una construcción lógica* Esta suposición implica una grave confusión debida a una completa falta de comprensión de lo que significa decir que *Esta silla es una construcción lógica* Las dos afirmaciones son fundamentalmente diferentes en su forma lógica La confusión es tan crasa como la de suponer que *si los hombres son numerosos y Sócrates es un hombre,* de ello se desprende que *Sócrates es numeroso* No puede ser necesario argumentar que esta conclusión no se sigue Pero algunas veces, debido a que no reconocemos que una palabra es sistemáticamente ambigua, cometemos errores que son igualmente absurdos, pero no tan obvios

Debe recordarse que las construcciones lógicas *no* son símbolos incompletos Nada que pueda decirse significativamente acerca de una construcción lógica puede decirse significativamente acerca de un símbolo incompleto El primer deber y la mayor dificultad del filósofo consiste en distinguir las afirmaciones que son significativas de aquellas que carecen de significado o son no-significativas En el capítulo XXIII vimos que "Una clase no es un miembro de sí misma" carece de significado Pero no es de ninguna manera obvio que carece de significado Nuestra dificultad consiste en *saber* cuándo estamos diciendo cosas sin sentido El reconocimiento de la ambigüedad sistemática nos permite algunas veces hacer este descubrimiento

APÉNDICE C

LOS SISTEMAS POSTULATIVOS Y PRINCIPIA *MATHEMATICA*

La construcción de un sistema deductivo puede enfocarse desde dos puntos de vista fundamentalmente diferentes Por una parte, puede emprenderse la construcción a fin de ver qué teoremas pueden derivarse de un conjunto de proposiciones primitivas que se considera son mutuamente consecuentes y separadamente independientes Tal conjunto de proposiciones primitivas puede ser llamado "un conjunto de postulados", y el sistema así construido puede ser llamado "un sistema postulativo" Es característico de los sistemas postulativos que el análisis comprendido puede ser circular [1] La circularidad se debe al hecho de que los teoremas y los postulados están en el mismo nivel Esto significa que, una vez que los postulados han sido seleccionados, la *simplicidad* debe entenderse con referencia sólo a los pasos comprendidos en la transición de los postulados a los teoremas Un teorema es más simple que otro si el primero se deriva de los postulados en un número menor de pasos que el segundo Los postulados son simples sólo en el sentido de que no se requiere *ningún* paso para llegar a los postulados, al contrario, *todos* los pasos parten de ellos Así, pues, los postulados no son *más simples que* ninguna otra cosa La *selección* de cualquier conjunto de postulados dado puede deberse a una variedad de razones, pero estas *razones* no tienen absolutamente nada que ver con el sistema cuando se le construye Hilbert, Veblen y E V Huntington han construido muchos diferentes sistemas postulativos, relacionados con diversas ramas de las matemáticas La referencia a las matemáticas, sin embargo, se produce solamente cuando el sistema postulativo es interpretado La demostración ocurre en el sistema, pero la demostración es relativa a los postulados iniciales

La construcción de un sistema postulativo puede emprenderse, por otra parte, a fin de analizar las entidades que constituyen los conceptos indefinidos y de exhibir sus interrelaciones de una manera ordenada En tal sistema, la circularidad sería un defecto, puesto que su característica distintiva es la de que tiene una dirección Propongo

[1] Véase C I Lewis, *Mind and the world order*, p 210

dar a un sistema así construido el nombre de "sistema direccional", a fin de señalar su diferencia respecto de un sistema postulativo ordinario En un sistema direccional, los postulados serán adecuadamente *primitivos*, es decir, que la distinción entre el teorema y los postulados del sistema no estará relacionada meramente con el hecho de que estos últimos son indemostrados Me parece que Whitehead y Russell, al construir el sistema desarrollado en *Principia mathematica*, no estaban construyendo un sistema postulativo, sino un sistema direccional [2] Ellos afirman claramente que su trabajo "está dirigido a efectuar el mayor análisis posible de las ideas que trata" Estas "ideas" son los conceptos fundamentales de las matemáticas, que ellos se propusieron reducir a sus elementos más simples, mostrando así que los conceptos matemáticos son enteramente reductibles a los conceptos de la lógica pura Whitehead y Russell no se contentaron con construir *un* sistema postulativo de entre una posible variedad de sistemas postulativos, *cualquiera* de los cuales produciría teoremas susceptibles de interpretación matemática Ellos se propusieron buscar un *solo* sistema tal que sus conceptos primitivos y sus proposiciones primitivas fueran adecuadas a la construcción de la totalidad de las matemáticas Este sistema debía basarse de manera única en un solo conjunto de conceptos y postulados fundamentales y admitir una sola interpretación única Para alcanzar esta finalidad, los conceptos primitivos no pueden considerarse meramente como *indefinidos*, ni las proposiciones primitivas meramente como *postuladas*, deben ser *fundamentales* en un sentido que excluya la selección arbitraria, siendo así *simple* en algún sentido no-relativo

Si esta concepción de *Principia mathematica* es correcta, entonces está sujeta a una crítica difícil de refutar y que es independiente de cualesquiera defectos tales como la suposición del llamado Axioma de la Reductibilidad. Esta crítica puede hacerse mediante la consideración del tratamiento que da Russell al simbolismo y del papel que desempeña la definición en el sistema de *Principia mathematica* En el capítulo XXII señalamos que la explicación russelliana de la definición es inconsecuente e insostenible [3] Russell desea considerar las definiciones como meras "conveniencias tipográficas" y al mismo tiempo sostener que las definiciones pueden "expresar un avance notable" en virtud de que contienen un análisis de un concepto A su confusión en este punto se debe, sin duda, el que no logre ver que al *definir* "$p \supset q$" por medio de "$\backsim q \vee q$", él está, de acuerdo con su propia afirmación, *meramente* dando una "abreviatura conveniente", al paso que trata la definición como si proporcionara un *análisis*

[2] Para un examen del *análisis direccional*, véase mi trabajo sobre "The method of analysis in metaphysics", *Proc Arist Soc*, N S, XXIII

[3] Véase la p 497 del presente libro En el resto de esta exposición hablaré de "Russell" en lugar de "Whitehead y Russell", puesto que se reconoce que el vol I se debe casi enteramente a Russell, y a él se debe la totalidad de la segunda edición de *Principia mathematica*

de la implicación Del mismo modo, considera la noción de una función proposicional, y, por lo tanto, de una *clase*, como fundamental, declarando al mismo tiempo, sin embargo, que las clases son "meras conveniencias simbólicas" No es posible que ambas concepciones sean correctas La segunda es la concepción que Russell evidentemente desea sostener, pero no parece ser capaz de prescindir de la primera Todo su tratamiento de la noción de *clase* es oscurecida por la confusión, a la que Russell es singularmente proclive, del *símbolo* con lo *simbolizado*

Este punto plantea el problema del tratamiento del simbolismo por parte de Russell En ningún lugar de *Principia mathematica* se encuentra un examen de la naturaleza y las condiciones del simbolismo y de su relación con las matemáticas En la Introducción a la primera edición encontramos la siguiente afirmación "El empleo de un simbolismo, que no sea el de las palabras, en todas las partes de este libro que se proponen englobar el razonamiento demostrativo estrictamente exacto, nos ha sido impuesto por la persecución consecuente de los tres propósitos antes mencionados" [4] Pero la explicación que sigue no aclara si los símbolos son *esenciales* o si son utilizados meramente porque el intelecto humano, siendo finito, es limitado en su aprehensión. Esta última alternativa queda sugerida, pero la primera parece ser la requerida Sin embargo, si los símbolos son esenciales, entonces ¿en qué sentido tienen significación estos símbolos? Un símbolo no-significativo es una contradicción en los términos Con todo, si tienen significación, ¿de dónde se deriva su significación? ¿No requerimos en todo caso *reglas no simbólicas relacionadas con la significación de las expresiones simbólicas?* Dentro del propio sistema de *Principia mathematica* no se dan ningunas reglas semejantes En el Prefacio se afirma: "Nuestro sistema lógico está totalmente contenido en las proposiciones numeradas, que son independientes de la Introducción y de los Sumarios " [5] Pero entre las proposiciones numeradas buscamos en vano cualesquiera principios que determinen cuáles combinaciones de símbolos son significativas

Estas dificultades, y otras que no podemos examinar aquí, sugieren que ciertas nociones pre-matemáticas son indispensables para la construcción de un sistema matemático y que hacen falta reglas de significación no-simbólicas que *deben ser incluidas en el sistema* si es que éste ha de ser un sistema direccional capaz de producir un análisis de las ideas fundamentales de las matemáticas Como ha señalado W E

[4] Para la enunciación de estos tres propósitos, véase la p 548 del presente libro

[5] La afirmación no es exacta, pues no es posible entender las proposiciones numeradas sin referirse a los sumarios Por ejemplo, en *21 se *supone* que $\Phi(x, y)$ será diferente de $\Phi(y, x)$, y se hace mención del *orden alfabético* y del *orden tipográfico* Pero esta explicación está contenida *solamente* en el Sumario, y sin embargo el *sentido* de la relación $\Phi(x, y)$ es esencial para la comprensión de los teoremas.

Johnson: "Aun un sistema simbólico perfectamente construido necesitaría introducir ciertos axiomas, así como también algunas proposiciones derivadas de axiomas, que sólo pueden expresarse en términos no-simbólicos Esta necesidad de recurrir al lenguaje ordinario al desarrollar un sistema deductivo muestra que la atención directa a los significados, presentados lingüísticamente, está vinculada al proceso de seguir en forma inteligente incluso una exposición declaradamente simbólica" [6] Esto es cierto, sin duda, en el caso de un sistema direccional tal como el que se ofrece en *Principia mathematica*

La importancia de las reglas de significación —o, para usar la expresión de Johnson, la "atención a los significados"— es reconocida por Hilbert y su escuela, a quienes generalmente se les llama "formalistas" Sólo dispongo de espacio para considerar muy brevemente el contraste entre la concepción formalista de las matemáticas y la que está contenida en *Principia mathematica* Hilbert distingue entre matemáticas y metamatemáticas Esta distinción puede considerarse como una distinción entre la construcción de un sistema simbólico que implica reglas o postulados arbitrariamente seleccionados y la enunciación de reglas de significación Según Hilbert, el matemático opera con *señales* o *números*, es decir, con signos escritos en el papel. Estas señales son como los tantos en un juego o como las piezas en una partida de ajedrez Las *reglas* de acuerdo con las cuales se *permiten* ciertas combinaciones de las señales constituyen las metamatemáticas No pueden ser introducidas dentro del sistema, pero el sistema no podría ser desarrollado sin ellas Los teoremas de las metamatemáticas guardan la misma relación con los teoremas de las matemáticas que las reglas del ajedrez con las piezas concretas en posibles juegos de ajedrez Como ha señalado el profesor G H Hardy, [7] esta distinción implica una distinción estricta entre dos formas de *prueba* Existe, en primer lugar, la *demostración pura*, que es la prueba dentro del sistema Ésta corresponde a los juegos de ajedrez Existe, en segundo lugar, la prueba de que ciertas combinaciones de símbolos no pueden ocurrir Éstos son los teoremas de las metamatemáticas. En la construcción de estas pruebas debe haber atención a los significados Esta separación de las metamatemáticas respecto de las matemáticas parece tener por objeto la separación de la *forma* del sistema respecto de lo que comúnmente se consideraría su *significación* Preguntar si cualquier teorema en el sistema puramente formal es *verdadero*, sería hacer una pregunta sin sentido Sólo podemos preguntar si se han seguido las reglas Si se han seguido, entonces el sistema es consecuente

Hay mucho que decir en favor de esta concepción formalista de las

[6] W E J, parte II, p 45

[7] "Mathematical proof", *Mind*, N S, 149 El estudiante interesado en la teoría de los fundamentos de las matemáticas debe consultar este artículo Yo lo habría utilizado en la primera edición de este libro, si se hubiera publicado antes de que yo lo escribiera Ahora le debo mucho

matemáticas Pero todavía deja en pie un problema considerable, que no puede considerarse resuelto Se trata del problema de la naturaleza exacta de los enumerados metamatemáticos y, por lo tanto, del papel que desempeña la intuición en el fundamento de las matemáticas Podemos, por último, añadir una palabra sobre este importante tema

Los lógicos modernos concuerdan en que la intuición espacial no entra en las matemáticas Russell y Whitehead parecen reconocer que la intuición de los conceptos lógicos fundamentales es necesaria Hilbert, si bien niega que las nociones matemáticas puedan ser derivadas de nociones puramente lógicas, insiste en que la intuición desempeña un papel importante y en que lo que es intuido son las señales o números concretos, los signos físicos en el papel con los cuales opera el matemático Una tercera escuela, cuyos representantes más importantes son Brower y Weyl, sostiene que las matemáticas se basan en una intuición pura de los números integrales, que están implicados en la intuición del tiempo Ninguna de las tres concepciones puede considerarse satisfactoriamente establecida Todo lo que puede decirse aquí es que no es probable que ninguna concepción sea satisfactoria a menos que se considere debidamente el importante problema de la significación Las matemáticas son algo más que una estructura simbólica, son una estructura que tiene significación El simbolismo es, ciertamente, *esencial* a las matemáticas, y no se le adopta meramente por conveniencia El simbolismo, sin embargo, debe ser adecuado a aquello que es simbolizado.

APÉNDICE D

COSA Y CAUSA

En mi examen de la causalidad he subrayado la íntima conexión entre *cosa* y *causa* Estoy enteramente de acuerdo con W E Johnson, quien dice "No se puede dar ninguna explicación de la causalidad sin referirse a la concepción de la sustancia, o sea, de un continuante existente, físico o psíquico; y, por otra parte, sólo podemos asignar propiedades a la sustancia o continuante mediante la definición de los modos de acuerdo con los cuales se manifiesta existencialmente como un agente o re-agente *causal* Así, pues, lo que recibe el nombre de propiedad de un continuante no es un carácter realmente manifestado, sino que define cuáles caracteres se manifestarían fenoménicamente cuando ocurren ciertas condiciones asignables "[1] "Continuante", para Johnson, significa lo que en el lenguaje ordinario se llaman "cosas" Los científicos hablan con frecuencia de "las propiedades" de las cosas, por ejemplo, "las propiedades de la materia", "las propiedades de las sustancias químicas" Este modo de hablar tiende a sugerir que las sustancias químicas —por ejemplo, el *agua*, el *hierro*, el *carbono*— son entidades contenidas en sí mismas, cada una de las cuales tiene una esencia distintiva, pues "propiedad" es una palabra derivada de la doctrina aristotélica de los predicables Pero, como lo vio claramente Locke, las *cosas* no son entidades contenidas en sí mismas, pues "las cosas, no importa cuán absolutas y cabales parezcan ser en sí mismas, no son sino retenedoras de otras partes de la naturaleza en aquello que nosotros más advertimos en ellas"[2] Decir "esta cosa tiene la *propiedad* tal o cual" es meramente una manera de decir "esta cosa, *bajo ciertas condiciones, se comporta* de tal o cual manera" Así, pues, *El azúcar tiene la propiedad de la solubilidad* significa *El azúcar se disuelve en los fluidos*; *El hierro tiene la propiedad de la expansión cuando se calienta* significa *El hierro se expande cuando se calienta* El énfasis en las *propiedades* de una sustancia puede hacernos pensar erróneamente en la sustancia como algo aparte de la situación en que se encuentra, es decir, aparte de otras

[1] *W E J*, parte III, p 86

[2] Véase p 314 del presente libro

sustancias o cosas en su vecindad No cabe duda de que frecuentemente es útil considerar la cosa aisladamente de su vecindad a fin de investigar sus diversos modos de comportamiento y de determinar aquellos que son invariables Tales modos de comportamiento invariables constituyen las *propiedades invariantes* de la sustancia Éstas sólo pueden descubrirse poniendo la cosa en diferentes condiciones a fin de observar *cómo* se comporta en circunstancias variantes Por ejemplo, la *masa* será considerada como una propiedad invariante de un pedazo de metal si, a través de todos sus cambios físicos y químicos, sigue siendo verdadero decir "Este estado del pedazo de metal tiene la masa *m* " [8] Una propiedad invariante es, pues, un modo característico y peculiar de comportamiento Asimismo, una característica permanente es un modo peculiar de comportamiento, a saber, la persistencia en un estado dado independientemente de los cambios que estén ocurriendo en la vecindad de la cosa

Existe, pues, una íntima relación entre *una cosa* y un *sistema relativamente aislado* Del mismo modo que podemos considerar un sistema dado aisladamente de otros sistemas, podemos considerar una cosa aisladamente de su situación Del mismo modo que para ciertos fines es necesario considerar *este sistema relativamente aislado* como un sub-sistema dentro de un sistema más grande, puede ser necesario considerar *esta cosa* como parte de una cosa más grande o como un elemento en una situación complicada Estas consideraciones muestran cómo la concepción del sentido común de lo que constituye *una cosa* es necesariamente indeterminada, pues el que X sea o no una cosa depende de la actitud con que se la considere Las cosas más persistentes y permanentes sufren cambios constantemente, es decir, exhiben modos característicos de comportamiento en una situación dada Cuando estos cambios son tan lentos o tan pequeños que son imperceptibles, podemos llegar a pensar que no ha estado ocurriendo ningún cambio Cuando estos cambios son muy rápidos o implican una considerable variación cualitativa, decimos que *la cosa* ha desaparecido Cada vez que la hoja de un cuchillo es utilizada para afilar un lápiz, ocurre un cambio en la hoja: ésta se gasta gradualmente Desde el punto de vista del uso práctico, la hoja será desechada cuando todavía sea reconocible como una hoja Cuando un vaso de cristal se rompe en fragmentos o cuando una moneda de oro se funde o cuando un buque es volado por una explosión, decimos que el vaso o la moneda o el buque ha desaparecido La desaparición completa es incompatible con la investigación científica, del mismo modo que lo sería la creación *ex nihilo* El científico se propone considerar los cambios que sufren las cosas —es decir, sus modos de comportamiento en circunstancias variantes— como modos recurrentes de cambios Es decir, el científico se propone formular las leyes causales que le permitirán tanto predecir como controlar el comportamiento de las

[8] *Cf* C D Broad, *Mind*, N S , 113, p 21

cosas De aquí surge el concepto científico de las *propiedades* de las cosas

El progreso en las ciencias físicas parece consistir en la reducción gradual del número de propiedades que es necesario mencionar Un guisante lanzado al suelo cae en una forma característica, una pelota arrojada con la mano se comporta en una forma característica, la luna se mueve, en relación con la Tierra, en una forma característica, asimis mo los planetas en relación con el sol De aquí surge el problema de si los modos de comportamiento así exhibidos por estas cosas pueden considerarse, todos ellos, reductibles a propiedades invariantes de una diminuta partícula material En esta etapa, la propia partícula material es considerada como una *cosa*, es decir, como una entidad ais lable De esta manera la ciencia se propone descubrir la permanencia en forma de modos de cambios regulares y, por lo tanto, predecibles y controlables