¡Oh, matemáticas severas!, yo no os he olvidado desde que vuestras sabias lecciones, más dulces que la miel, se infiltraron en mi corazón como una onda refrescante... Había en mi espíritu algo vago, un no se qué espeso como el humo; pero supe franquear religiosamente las gradas que conducen a vuestro altar, y vosotras habéis disipado ese velo oscuro como el viento disipa a la niebla. Vosotras habéis puesto, en su lugar, una frialdad excesiva, una prudencia consumada y una lógica implacable.

LAUTRÉAMONT,

Les chants de Maldoror

I. LOS DEFECTOS DEL APARATO EUCLIDIANO

§ 1. *Introducción general.* La geometría clásica, bajo la forma que le dio Euclides en sus *Elementos,* pasó durante mucho tiempo por un modelo insuperable, y aun difícilmente igualable, de teoría deductiva. Los términos propios de la teoría jamás se introducen en ella sin ser definidos; las proposiciones jamás se adelantan sin ser demostradas, a excepción de un pequeño número de entre ellas que se enuncian en primer lugar a título de principios: la demostración no puede, en efecto, remontarse al infinito y debe sin duda reposar sobre algunas proposiciones primeras, pero se ha tenido cuidado en elegirlas de tal manera, que no subsista ninguna duda a su respecto en un espíritu sano. Aunque todo lo que se afirma sea empíricamente verdadero, no se invoca a la experiencia como justificación: el geómetra no procede sino por vía demostrativa, no funda sus pruebas sino sobre lo que se ha establecido anteriormente, conformándose con las solas leyes de la lógica. Así, cada teorema se encuentra unido por una relación necesaria a las proposiciones, de las cuales se deduce como consecuencia, de suerte que, paso a paso, se constituye una red apretada en donde, directa o indirectamente, todas las proposiciones comunican entre sí. El conjunto forma un sistema del cual no se podría distraer o modificar una parte sin comprometer el todo. Así, "los griegos razonaron con toda la exactitud posible en las matemáticas y dejaron al género humano modelos del arte de demostrar".[1] Con ellos, la geometría dejó de ser una colección de recetas prácticas o, cuando más, de enunciados empíricos, para llegar a ser una ciencia racional. De ahí el papel pedagógico privilegiado que desde

[1] LEIBNIZ, *Nouveaux essais,* IV, II, 13.

entonces no ha dejado de reconocérsele. Si se la hace estudiar a los niños, es menos para enseñar algunas verdades que para disciplinar el espíritu, considerando que su práctica da y desarrolla el hábito del razonamiento riguroso. Como escribe L. Brunschvicg: "*Euclides*, para las numerosas generaciones que se han nutrido de su sustancia, ha sido quizá menos un profesor de geometría que un profesor de lógica." [2] Y la expresión *more geometrico* ha venido a significar *more logico.*

No obstante, ha parecido cada vez mejor que, si la geometría euclidiana había seguido siendo durante mucho tiempo el ejemplo más cumplido que se pudiera citar de una teoría deductiva, el aparato lógico que la sostenía no era en modo alguno irreprochable. Algunas de estas imperfecciones habían sido advertidas muy pronto, pero no fue sino hasta el siglo XIX, cuando se midió la distancia que subsistía entre la exposición tradicional y una teoría deductiva ideal. Uno de los rasgos que distinguen mejor a las matemáticas desde esta época, es en efecto un acrecentamiento súbito del afán de rigor lógico. Examinada así con una severidad nueva, la deducción geométrica clásica se revelaba defectuosa en muchos puntos. Se hicieron esfuerzos por rectificarla y la presentación axiomática de la teoría fue el resultado. Suscitada principalmente por una reflexión sobre la deducción geométrica, se desprende, por lo demás, precisamente en razón de su carácter lógico y formal, del contenido geométrico, y puede así ser practicada sobre una teoría deductiva cualquiera. Un sistema axiomático —se dice también: una teoría axiomatizada o, más brevemente, una axiomática— es, pues, la forma acabada que toma, hoy, una teoría deductiva. En manera alguna es aquel sistema quimérico con el que soñaba Pascal para espíritus sobrehumanos, en donde se definirían todos los términos y demostrarían todas las proposiciones, sino un sistema en donde sean totalmente explicitados los términos no definidos y las proposiciones no demostradas, siendo establecidas estas últimas como simples hipótesis, a partir de las cuales las proposiciones del sistema pueden construirse según reglas lógicas perfecta y expresamente determinadas.

[2] *Les étapes de la philosophie mathématique*, cap. VI, 49.

Un método parece gratuito cuando se ignora cuáles razones lo han impuesto. Para hacer comprender la función de la axiomática, lo mejor es, pues, exponer en primer lugar las insuficiencias a las que se propone poner remedio (capítulo I). Pero se duda con razón de que ella misma haya surgido perfecta de un solo golpe. Las exigencias de rigor que la habían hecho nacer fueron a su vez como exasperadas por su uso, y recayeron sobre ella para impelerla siempre más lejos en el camino en donde se había empeñado. Sin que sigamos estas transformaciones en su detalle histórico, será necesario al menos distinguir dos grandes etapas en su desenvolvimiento, de las cuales la primera se sitúa a fines de siglo (capítulo II), la segunda comienza hacia 1920 (capítulo III). En fin, se intentará mostrar el alcance de tal método, tanto por su uso propiamente científico (capítulo IV), como por sus implicaciones filosóficas (capítulo V).

§ 2. *Los postulados.* La primera cosa que atormentó a los lectores de Euclides amigos del rigor, fue la intervención de los postulados. Lo que molestó en primer lugar, no eran propiamente los tres postulados que figuran a la cabeza de los *Elementos,* al lado de las definiciones y de los axiomas, y que tienen un carácter operatorio muy general, con la única mira de anunciar que uno se permitirá construcciones con la regla y el compás. Pero, después de haber comenzado la cadena de sus deducciones, ocurre dos veces que Euclides, en el curso mismo de una demostración y para las necesidades de ésta, invoca una proposición muy particular, que pide se le otorgue, sin poder justificarla de otra manera que por una suerte de llamado a la evidencia intuitiva. Así es como, para demostrar su proposición 29, necesita admitir que, por un punto fuera de una recta, no pasa más que una sola paralela a esta recta. La simetría aparente entre la proposición que enuncia que por un punto pasa al menos una paralela, proposición que se establece por una demostración (teorema de existencia), y la que enuncia que pasa una a lo sumo (postulado de unicidad), hacía más escandalosa aún la asimetría de las justificaciones. El postulado de las paralelas sobrevenía así como un eslabón extraño al sistema, como un expediente destinado a llenar una laguna en el encadenamiento lógico. A los ojos de los geómetras, tenía el aspecto de teorema empírico, cuya verdad no era puesta en cuestión, pero cuya demostración quedaba por descubrir. Los sabios alejandrinos, árabes y modernos se aplicaron sucesivamente a ello, pero siempre el análisis revelaba que las pretendidas demostraciones se fundaban en alguna otra suposición, que muy frecuentemente quedaba implícita: no se había hecho sino cambiar de postulado. Se sabe cómo el fracaso de las demostraciones directas sugirió la idea de una demostración por el absurdo, y cómo a su vez el fracaso de las demostraciones por el absurdo terminó pronto, por una inversión del punto de vista, en la constitución de las primeras geometrías llamadas no-euclidianas.

El alcance epistemológico de estas nuevas teorías es considerable. En particular, han contribuido grandemente a desplazar el centro de interés de la geometría especulativa, transportándolo del contenido hacia la estructura, de la verdad extrínseca de las proposiciones aisladas hacia las coherencia interna del sistema total. La suma de los ángulos de un triángulo ¿es igual, inferior o superior a dos ángulos rectos? De los tres casos concebibles, un geómetra antiguo habría respondido que el primero era verdadero, los otros dos falsos. Para un moderno, se trata ahí de tres teoremas distintos, que no se excluyen mutuamente sino en el interior de un mismo sistema, según que el número de las paralelas sea postulado igual, superior o inferior [3] a uno, y que aun se toleran en un sistema debilitado y más general, donde el número de paralelas posibles se deje en suspenso. El que la experiencia en nuestra escala verifique una, y solamente una, de estas tres proposiciones, no concierne sino a la utilización práctica de la ciencia, no a la ciencia pura y desinteresada.

La idea aparecida así con ocasión de la teoría de las paralelas, debe naturalmente extenderse al conjunto de los postulados. Vemos entonces disociarse los dos aspectos de la verdad geométrica, hasta ahí íntimamente mezclados en una unión sorprendente. Un teorema de geometría era a la vez

[3] El teorema, mencionado en la página precedente, que establece la existencia de la paralela, postula que se puede prolongar una recta indefinidamente, lo que es permitido rechazar.

un informe sobre las cosas y una construcción del espíritu, una ley de física y una pieza de un sistema lógico, una verdad de hecho y una verdad de razón. De estas parejas paradójicas, la geometría teórica abandona ahora decididamente el primer elemento, que remite a la geometría aplicada. Ya no hay, para los teoremas, verdad separada y por decir así atómica: su verdad es solamente su integración al sistema y por eso algunos teoremas incompatibles entre ellos pueden igualmente ser verdaderos, con tal que se los refiera a sistemas diferentes. En cuanto a los sistemas mismos, ya no es cuestión para ellos de verdad o falsedad, sino en el sentido lógico de la coherencia o de la contradicción interna. Los principios que los imponen son simples hipótesis, en la acepción matemática de este término: son solamente puestos, y no afirmados; no son dudosos, como las conjeturas del físico, sino situados más allá de lo verdadero y lo falso, como una decisión o una convención. La verdad matemática toma así un carácter global: la de una vasta implicación, en donde la conjunción de todos los principios constituye el antecedente, y la de todos los teoremas, el consecuente.

En la interpretación tradicional, la demostración matemática era categórica y apodíctica. Decía: siendo estos principios absolutamente verdaderos, tal proposición, que deduzco de ellos, es por consiguiente verdadera también. Aristóteles la llamaba: El silogismo de lo necesario. Ahora dice solamente esto: Si se pone, arbitrariamente, tal conjunto de principios, he aquí las consecuencias que, formalmente, resultan de ahí. La necesidad no reside más que en el lazo lógico que une las proposiciones, se ha retirado de las proposiciones mismas. La matemática ha llegado a ser, según la expresión de Pieri, un *sistema hipotético-deductivo*.

§ 3. *Las figuras.* En Euclides, el postulado de las paralelas hacía a la intuición espacial un llamado explícito, pero aparentemente excepcional. En realidad, ha sido invocada a todo lo largo de las demostraciones, y Poincaré podía decir justamente que, en esa vasta construcción donde los antiguos no encontraban ningún defecto lógico, todas las piezas se deben a la intuición. En un sentido, nada era sin embargo más manifiesto: las figuras mismas lo declaran. Pero el texto no lo dice expresamente en modo alguno; hace creer que las figuras no están ahí sino como simples auxiliares del razonamiento, las cuales duplican en cierta forma la demostración lógica mediante una ilustración sensible, sin serle indispensables. No hay nada de ello: suprimid la figura, trazada o imaginada, y la demostración se viene abajo. No vayamos más lejos de la primera proposición de Euclides, que es un problema: construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado AB. Se trazan dos círculos de radio AB, uno con A como centro, otro con B: el punto de intersección M, cuya distancia a A o a B es la del radio AB, será el tercer vértice buscado. Mas, para quien no ve o no se representa mentalmente la figura, la demostración es deficiente: ¿cómo sabe uno que los dos círculos se cortan? La existencia del punto M ha sido mostrada, no demostrada.

Se ha discutido mucho para saber si la consideración de las figuras era esencial a la especulación geométrica. Si las demostraciones geométricas clásicas son tomadas como modelos, entonces es verdad que la intuición —contemplación y aun construcción— debe intervenir ahí. Tal era, se sabe, una de las tesis que Kant puso como base de su *Crítica*. Que se dé a un filósofo, decía, el concepto del triángulo: por mucho que lo analice, considere los conceptos más elementales de la línea recta, del ángulo, del número 3, jamás descubrirá ahí la propiedad de que la suma de sus ángulos sea igual a dos rectos. Que se someta ahora la cuestión al geómetra: éste construye un triángulo, prolonga uno de los lados, etcétera, y llega al resultado por una cadena de razonamientos guiada constantemente por la intuición. Tesis análogas han sido retomadas por Cournot, Goblot y, bajo una forma más refinada, por los matemáticos intuicionistas contemporáneos. Pero es posible otra conclusión: si se piensa que el llamado a la intuición es una falta en una construcción que se presenta como lógica, entonces uno se propondrá corregir los métodos clásicos de demostración para substituir la intuición por su equivalente intelectual. Le es muy necesario, por lo demás, con las nuevas geometrías, cuyos espacios ya no se dejan casi representar en la intuición.

Cuando se debe recurrir a las figuras, es evidentemente porque dicen a los ojos cosas que el texto, que se dirige a la sola inteligencia, sobreentiende. La fuerza de la intuición es tal, que aun su ausencia no se nota. Por ejemplo, no hace apenas sino un siglo que se advirtió que en ninguna parte Euclides enunció la proposición siguiente que no deja sin embargo de utilizar: si una recta tiene dos puntos en un plano, está contenida en él completamente. En las exposiciones clásicas de geometría, un análisis atento descubre así un gran número de proposiciones implícitas. En primer lugar, las proposiciones de existencia. La posibilidad de construirla en la intuición prueba seguramente que la noción de la cual se trata no envuelve contradicción, pero es una prueba de hecho, no una justificación racional. Después, las proposiciones que se refieren a la congruencia y que están implicadas en diversas operaciones, a las cuales se entrega mentalmente el geómetra: por ejemplo, regresar una figura para hacerla coincidir con su propio trazo. Los *Elementos* no enuncian expresamente más que una sola proposición de esta naturaleza, que colocan por lo demás entre los axiomas. Mencionemos aún las proposiciones que enuncian propiedades topológicas, es decir, que conciernen al orden y a la continuidad, independientemente de toda consideración de ángulos y de métrica.[4] Euclides y sus sucesores, hasta el último siglo, pasaron regularmente en silencio estas propiedades, utilizándolas no obstante a cada paso, porque la visión de la figura las sugería suficientemente. Es claro que un método riguroso no puede permitirse este recurso permanente a la intuición. Exige que todas las propiedades supuestas sean enunciadas bajo la forma explícita de proposiciones: las que se demuestren, serán afirmadas como teoremas, las otras irán a aumentar el número de los postulados.

§ 4. *Los axiomas.* Al lado de los postulados se colocan tradicionalmente, para completar los principios de la geometría,

[4] Consideremos una figura cualquiera trazada sobre una hoja de caucho, que se pueda combar y estirar: son topológicas las propiedades de la figura que permanecen invariantes, por ejemplo, ésta: de cuatro puntos situados sobre una curva continua abierta, si *C* está entre *A* y *D* y si *B* está entre *A* y *C*, entonces *B* está entre *A* y *D*.

los axiomas, que son otro nombre para las "nociones comunes" de Euclides, y las definiciones. ¿Se justifica este ordenamiento desde el punto de vista lógico?

La separación entre los axiomas y los postulados quedó a menudo indecisa. Frecuentemente, las dos palabras mismas han sido, y son aún, tomadas indiferentemente la una por la otra: como prueba, el nombre mismo de la axiomática, que se llamaría, sin duda, más justamente una postulática. Los editores de Euclides que han vuelto a poner a la cabeza de los *Elementos* las propiedades que Euclides había postulado en el curso de sus demostraciones, las han colocado, unas veces a continuación de las "peticiones" otras veces a continuación de las "nociones comunes". En la medida en que se lo distingue del postulado, el axioma envuelve en primer lugar la idea de una evidencia intelectual. Mientras el postulado es una proposición sintética, cuya contradictoria, difícil o imposible de imaginar, permanece no obstante concebible, el axioma sería una proposición analítica que constituiría un absurdo negar. Además, funcionaría como un principio puramente formal, regulando los pasos del razonamiento, pero sin llevarle, contrariamente a los otros principios, alimento alguno. Estas dos ideas se unen en la tesis, largo tiempo propagada —pero jamás justificada por un análisis preciso—, que hacía de los axiomas simples especificaciones de leyes lógicas, aplicadas a la cantidad.

Ahora bien, la noción de evidencia despierta cada vez más y más la desconfianza del matemático. El sentimiento de la evidencia es engañoso y su dominio varía según el temperamento intelectual de cada uno. Si uno quisiera apoyarse en él, los espíritus intuitivos pedirían sin duda que se suprimiera más de una demostración, menos evidente para ellos que el teorema que se supone tal demostración justifica. Otros, al contrario, más exigentes, rehusarían reconocer tal axioma como incondicionalmente necesario. Y es verdad que algunos de los axiomas de Euclides han sufrido, en la matemática moderna, una suerte de degradación: por ejemplo, el que enuncia que el todo es mayor que la parte, no vale, en un cierto sentido,[5] más que para los conjuntos finitos, y podría aún servir, como se ha sugerido, para definir tales conjuntos; en este sentido ya no es una proposición analítica, es una convención que delimita un cierto campo y a la cual el espíritu no está en manera alguna sujeto. Por lo demás, el papel que se ha hecho jugar a la evidencia durante largo tiempo, está ligado al ideal de una matemática categórica, en donde lo que no está demostrado, debe sin embargo, de alguna manera, exhibir sus títulos en orden a la verdad. Ello se afina en una concepción hipotético-deductiva, centrada en la idea de coherencia lógica más bien que en la de verdad absoluta. Al poner así en el primer plano la idea de sistema, se impone reducir al mínimo las proposiciones independientes. Pero, si uno se esfuerza así por demostrar los axiomas, es dentro de un espíritu muy diferente al que inspiraba a Leibniz cuando formulaba la misma exigencia. Porque no se trata ya de reducirlos a proposiciones idénticas a fin de hacer resplandecer su evidencia, se trata simplemente de reducir al mínimo la base del sistema, debiendo aparecer los principios, de donde deducirán los axiomas, intuitivamente menos evidentes que ellos.

Estas últimas consideraciones valen sobre todo, es cierto, para la verdad material de las proposiciones, y pierden su fuerza aplicadas a principios formales y reguladores. Pero, sobre este punto, la teoría clásica carece aún de claridad. Pone los axiomas en una situación intermedia entre las proposiciones lógicas y las proposiciones geométricas: reguladores como las primeras, se refieren a la cantidad como las segundas. Pero, o bien se puede obtenerlas aplicando los principios de la lógica a las primeras nociones matemáticas, y en tal caso es necesario hacerlo y borrarlas del número de las proposiciones primeras de la geometría, para contarlas como proposiciones de lógica aplicada. O bien son rebeldes a tal reducción y esta resistencia manifiesta su carácter de postulados. Conviene, pues, disociar los axiomas, de manera que una parte pase a los postulados y la otra caiga fuera de la

[5] En el sentido en que "es mayor que" se entiende como "tiene una potencia superior a" (v. § 26, nota), el axioma deja, en efecto, de valer para los conjuntos infinitos — en donde, no obstante, el todo "contiene con una demasía", a la parte.

geometría. Ya no habrá lugar para ellos entre los principios de la geometría, al nivel y al lado de los postulados.

§ 5. *Las definiciones.* Menos aún se necesita contar las definiciones entre los primeros principios. Hay ahí un error lógico sorprendente, que un instante de reflexión basta para disipar. Se justifica el recurso a proposiciones primeras invocando la imposibilidad de demostrar todo. Ahora bien, las mismas razones que valen para la demostración, valen evidentemente para la definición. Se define un término mediante otros términos, éstos a su vez mediante otros, de suerte que, para evitar la regresión al infinito, es necesario sin duda detenerse en algunos términos no definidos, así como las demostraciones deben apoyarse sobre algunas proposiciones no demostradas. Estos términos irreductibles constituyen, para retomar una comparación de Russell, una suerte de alfabeto geométrico: sirven para deletrear, es decir, entran como elementos para componer las definiciones, pero ellos mismos son indefinibles. Estos indefinibles son los que conviene enunciar a la cabeza de la teoría deductiva, y no las definiciones. Estas intervendrán ulteriormente, para substituir por un término nuevo más simple una expresión construida, directamente o por definiciones intermedias, con la ayuda de términos primeros — exactamente como intervienen las demostraciones para justificar proposiciones nuevas con la ayuda de las proposiciones primeras. [6]

También las "definiciones" iniciales de Euclides no tienen de definiciones más que la apariencia. Se reducen a simples descripciones empíricas, comparables a las que daría un diccionario, que tuviera por objeto dirigir el espíritu hacia la noción de que se trata. Son propiamente *designaciones.* Por eso es por lo que casi no satisfacen a la función que parece asignárseles: enunciar las propiedades fundamentales, las que se utilizarán a fin de obtener de ahí todas las otras, en las proposiciones en donde figurará el término definido. Euclides define la línea recta: la que descansa igualmente sobre sus puntos; Herón la substituye por la definición siguiente, en apariencia

[6] Esta analogía funcional entre definición y demostración fue muy bien señalada por Pascal, en su fragmento (*De l'esprit géométrique*).

más clara: el camino más corto entre dos puntos Leibniz advierte con razón que la mayor parte de los teoremas que se apoyan sobre la recta no utilizan ni una ni otra de estas dos propiedades. Por un lado, tales definiciones son, pues, superfluas. Y por otra parte, disfrazan ausencia de proposiciones que enuncian las propiedades útiles, por ejemplo ésta, que explicarán más tarde los editores de Euclides: dos rectas no encierran un espacio. Esta discordancia entre las propiedades enunciadas en la pseudo-definición y las propiedades efectivamente utilizadas luego, constituye una falta lógica grave, porque hace nacer una sospecha sobre la identidad de la noción: ¿qué nos asegura que la recta de la cual hablan los teoremas es ciertamente aquella misma que se pedía a la definición introducir?

De una manera general, trátese de falsas definiciones iniciales o de verdaderas definiciones ulteriores, las exposiciones clásicas de geometría cometen con mucha frecuencia el error de presentar como aparentemente simples fórmulas donde se combinan en realidad dos enunciados de naturaleza muy diferente, una proposición y una denominación; y sin duda, esta confusión está en el origen de la tesis propagada durante largo tiempo, que ve en las definiciones los principios fecundos de donde los teoremas obtendrían toda su substancia. Sea la definición 15 de Euclides: círculo es la figura plana terminada por una línea tal que todas las rectas que la unen en un cierto punto interior a la figura son iguales entre sí. Significa dos cosas: 1º es posible terminar una figura plana por una línea recta tal que..., etcétera; 2º se llamará "círculo" una figura tal. Este segundo enunciado —al que sin duda sería más pertinente reservar el nombre de "definición", puesto que el primero es propiamente una aserción— no concierne sino al lenguaje, y no aporta rigurosamente ningún nuevo contenido a la ciencia geométrica. Es una decisión o una convención que abrevia el discurso, que puede, por tanto, justificarse por su comodidad, pero no tiene nada que ver con la verdad. No se sigue que pueda uno arbitrariamente afirmar la proposición correspondiente: aquélla es verdadera o falsa y, bajo este título, fuente de verdades o contradicciones ulteriores. Por tanto, si se descarta como inadecuado el llamado implícito a la intuición, es necesario demostrarla como teorema o establecerla como postulado.

La utilidad de esta exigencia lógica aparecerá tanto mejor si la definición reúne bajo un mismo término un número mayor de propiedades heterogéneas: entonces no basta que cada una sea posible, es necesario que en conjunto sean integrables. Si uno no se asegura de su compatibilidad, se expone a cometer lo que Saccheri denunciaba como "error de definición compleja": como si yo pretendiera definir un poliedro regular que tuviera por caras hexágonos.

§ 6. *Demostración y definición.* Parece así que en el punto de partida de una teoría deductiva, concebida para satisfacer a las exigencias lógicas, deberán figurar no únicamente los tres "principios" tradicionales: definiciones, axiomas y postulados, sino proposiciones no demostradas —que se llamarán indiferentemente axiomas o postulados— y términos no definidos: y todo el trabajo ulterior consistirá en construir a partir de ahí proposiciones nuevas, justificadas por medio de demostraciones y de términos nuevos, fijados por medio de definiciones. Demostración y definición, tales son, pues, las dos operaciones fundamentales mediante las que se desarrolla una teoría deductiva. Pero, ¿a qué condiciones debe satisfacer una buena demostración, una buena definición? Eso depende del fin que se asigne a estas operaciones y, también sobre este punto, las exposiciones clásicas de geometría carecen a menudo de claridad. Parecen proponerse en forma simultánea dos cosas diferentes, y que no se concilian necesariamente. Sin duda, la confusión es aquí menos imputable a Euclides mismo que al largo uso pedagógico que se ha hecho de su obra. Pero tiende también a ese rasgo de la geometría clásica de pretender unir la verdad material de las proposiciones y la verdad formal de su encadenamiento, la exactitud empírica y el rigor lógico.

Si se pone en primer plano la verdad del contenido, entonces la demostración y la definición llegan a ser simples medios para establecerla. El papel de la definición será hacer concebir exactamente el sentido de los términos que componen las proposiciones, y el de la demostración, hacer admitir la verdad de éstas. Definición y demostración dependen entonces, propiamente hablando, de la retórica; su función es esencialmente psicológica: pedagógica o didáctica. En la otra hipótesis, por el contrario, no tienen más que una función lógica: reunir todos los términos y todas las proposiciones en un conjunto sistemático. Ahora bien, es claro, en primer lugar, que las dos exigencias, eficiencia psicológica y rigor lógico, tiran a veces en sentidos opuestos; luego, que tan pronto como se vincula uno a la primera, el valor de una demostración o de una definición se vuelve relativo, y aun doblemente relativo: una demostración o una definición no es más buena o mala, es solamente mejor o menos buena que otra; y esta cualidad, a su vez, varía según el lector o el oyente. Pedagógicamente, la buena definición, la buena demostración, es la que el alumno comprende. Eso puede llevar lejos. Para el niño, la verdadera definición de la elipse no es la que aprende de memoria, sino algo como: *un círculo alargado*; la buena demostración no es la que escribe en su cuaderno, es la figura que la acompaña. Si solamente la buena demostración es el argumento eficaz, ¿dónde se detendrá uno? Es conocida la anécdota de aquel preceptor principesco que, terminados los recursos, llegó sin embargo, a hacer admitir su teorema exclamando por último, irritado: ¡Señor mío, os doy mi palabra de honor!

Parece que, entre los matemáticos mismos, las dos funciones no siempre han estado claramente disociadas. Si no, se comprendería mal que algunos hayan compartido el asombro que provoca, en el profano, más de una demostración de Euclides: ¿por qué afanarse en persuadirnos por un razonamiento difícil de cosas de las que estamos de antemano perfectamente seguros o incluso en demostrar lo más evidente por lo menos evidente? La *Lógica* de Port-Royal cuenta entre los "defectos que se encuentran de ordinario en el método de los geómetras" el de "probar cosas que no tienen necesidad de pruebas". Algunos buscan explicaciones y excusas, como hace Clairaut: [7] "Que Euclides se tome la molestia de demostrar que dos círculos que se cortan no tienen el mismo centro y

[7] *Eléments de géométrie*, 1741; citado por F. GONSETH, *La géométrie et le problème de l'espace*, t. II, p. 141.

que un triángulo encerrado en otro tiene la suma de sus lados más pequeña que la de los lados del triángulo en el cual está encerrado: uno no se sorprenderá de ello. Este geómetra tenía que convencer a sofistas obstinados, que hacían gala de rechazar las verdades más evidentes; era necesario, pues, que la geometría tuviera entonces, como la lógica, el auxilio de razonamientos en forma, para cerrar la boca a la chicana." Y Clairaut añade: "Pero las cosas han cambiado de aspecto. Todo razonamiento que recae sobre lo que el buen sentido decide de antemano, viene a ser hoy pura pérdida y no es propio sino para obscurecer la verdad y disgustar a los lectores." La misma concepción fundamental del papel de la demostración en el filósofo Schopenhauer quien, menos indulgente, juzga francamente "absurdo" el método de Euclides y esta manía de substituir la intuición por el discurso: es como si un hombre, dice, se cortara las dos piernas a fin de caminar con muletas.

Sin embargo, el "absurdo" mismo que se encuentra ahí ¿no debería hacer sospechar que uno se equivoca quizá sobre las intenciones de Euclides? Que se pueda, como hace Pascal, mirar el razonamiento geométrico como un modelo del arte de convencer, parte él mismo del arte de persuadir, no implica que tal sea su función primera y esencial. En efecto, sabemos que muchas de las proposiciones de Euclides eran conocidas antes de él y casi no hay duda de que hayan sido admitidas como verdaderas por todos los expertos. Pero faltaba organizarlas lógicamente, unir las unas a las otras por una red tupida. Aparentemente es lo que quiso hacer y, en todo caso, lo que realmente hizo Euclides. Y tal es sin duda ahora el propósito cada vez más y más declarado del matemático. Desde la época de Clairaut, las cosas han "cambiado de aspecto" una vez más. "En el sistema de todos los juicios verdaderos, escribía ya Bolzano reina una conexión objetiva, independiente del hecho contingente de que la conozcamos de modo objetivo; por ella ciertos juicios son el fundamento de otros." [8] Desprender estas conexiones objetivas, tal parecía, en adelante, el verdadero fin de la demostración en una teoría deduc-

[8] *Philosophie der Mathematik*, 1810; citado por CAVAILLÈS, Méthode *axiomatique et formalisme*, pp. 46-47.

tiva. Al mismo tiempo que la certidumbre subjetiva, se deja a un lado la verdad material de las proposiciones, y la matemática se convierte en hipotético-deductiva. Desde principios del siglo XIX, esta separación entre las dos concepciones de la ciencia y de la demostración matemáticas, había sido señalada, con una claridad perfecta, por un filósofo hoy ya olvidado, víctima del descrédito en que cayó la escuela escocesa. "En matemáticas, señalaba Dugald Stewart,[9] nuestros razonamientos ... no tienen por fin constatar *verdades* acerca de existencias reales, sino determinar la filiación lógica de las consecuencias que se derivan de una *hipótesis* dada. Si, partiendo de esta *hipótesis*, razonamos con exactitud, es manifiesto que nada podría faltar a la evidencia del resultado; pues este resultado se limita a afirmar un enlace necesario entre la suposición y la conclusión ... De estas proposiciones no se puede decir que son *verdaderas* y *falsas*, al menos en el sentido en que se les llama proposiciones relativas a los hechos ... Cuando se dice de estas proposiciones que las unas son *verdaderas*, las otras *falsas*, estos epítetos se refieren únicamente a su conexión con los *data*, no a su relación con cosas actualmente existentes o a acontecimientos futuros."

Así como la demostración vacila entre una función psicológica (determinar el asentimiento) y una función lógica (organizar las proposiciones en sistema), asimismo la definición se instala unas veces en el plano del pensamiento, otras en el del discurso, y muy a menudo pretende hacer a la vez lo uno y lo otro. Apunta, como su nombre lo sugiere, a delimitar la comprensión de una idea, pero también a establecer una equivalencia lógica entre un término nuevo y un conjunto de términos anteriormente introducidos: el medio viene a ser un nuevo fin, que a menudo se añade al primero sin borrarlo. De ahí una fluctuación que se observa hasta en la matemática casi-contemporánea. Recordemos solamente las burlas de Poincaré sobre la definición del número 1 en la aritmética simbolizada de la escuela de Peano: "Definición eminentemente propia, dice con ironía,[10] para dar una idea del número

[9] *Eléments de la philosophie de l'esprit humain*, vol. II, 1813, trad. de L. PEISSE, pp. 106-7. El autor es quien subraya.
[10] *Science et méthode*, p. 168.

1 ¡a las personas que jamás hubieran oído hablar de él!"

Uno de los primeros beneficios del método axiomático será disipar estas confusiones, disociando la matemática pura, ciencia formal, y la matemática aplicada, ciencia de lo real; o, más precisamente, obligando a tomar claramente partido y a escoger entre las dos lecturas de una misma teoría matemática, según que uno se interese en ella por la coherencia lógica o por la verdad empírica.