elementos, a saber, el Sol, los planetas y sus satélites, que guardan ciertas relaciones Una organización social es un sistema que consiste en clases sociales relacionadas en cierta forma En *cualquier* sistema dado, *el hecho de que* un elemento guarde una relación dada puede expresarse mediante una proposición Así, las posiciones relativas de la Tierra, Júpiter y el Sol, pueden ser expresadas por la proposición *La Tierra está entre Júpiter y el Sol* Dado cualquier *sistema*, la relación de sus elementos puede ser expresada en un conjunto de *proposiciones relacionadas* Un sistema deductivo es un tipo especial de sistema en el que los elementos son *proposiciones*, y las relaciones entre los elementos son relaciones *lógicas* En este capítulo trataremos únicamente los sistemas deductivos El estudiante tendrá alguna familiaridad con el más desarrollado de tales sistemas: las matemáticas deductivas Pero puede que no tenga mucha comprensión íntima de la *naturaleza* del sistema Se ha supuesto comúnmente que tales sistemas son demostraciones de proposiciones complejas a partir de axiomas simples Se suponía que los axiomas eran evidentes por sí mismos, es decir, indubitablemente verdaderos Pero se les consideraba indubitables sólo porque no se dudaba de ellos La evidencia por sí misma es una noción relativa Lo que podemos dudar depende de nuestro conocimiento previo y de nuestra capacidad mental Durante siglos se supuso que el sistema geométrico de Euclides se basaba en axiomas que eran evidentes en sí mismos o indiscutiblemente verdaderos, de los cuales se desprendían deductivamente todos sus teoremas Ahora sabemos que tal creencia es errónea La elaboración de las geometrías no-euclidianas ha mostrado que es posible construir sistemas geométricos basados en axiomas diferentes de los de Euclides y que conducen a diferentes resultados El examen cuidadoso de la naturaleza de esos axiomas y de la conexión entre ellos y los teoremas resultantes, reveló el hecho de que los teoremas de Euclides no se desprenden de sus axiomas, sino que requieren el supuesto de axiomas ulteriores que no reconoció el propio Euclides Por lo tanto, vemos que es importante preguntar qué es un axioma No podemos contestar que un axioma es una proposición *necesariamente verdadera*, pues no sabemos qué significa "necesariamente verdadera" ni tampoco el uso de un axioma en un sistema deductivo depende de que sea *verdadero* Probablemente porque los axiomas de Euclides fueron considerados como descriptivos del espacio de nuestro mundo externo, se les supuso tanto evidentes en sí mismos como verdaderos Ahora que este supuesto es rechazado, tenemos mayor razón para dudar que sean evidentes en sí mismos

La evidencia en sí misma parece combinar dos elementos: la obviedad y la prioridad lógica La obviedad es una cuestión de familiaridad y punto de vista No es una noción útil para la lógica Podría, sin embargo, suponerse que nos sería posible definir axiomas en términos de prioridad lógica Por lo tanto, los axiomas serían proposiciones lógicamente previas a cualesquiera otras proposiciones Pero la prioridad lógica no es absoluta La noción de prioridad lógica es oscura Su examen se ha hecho innecesariamente complicado con supuestos metafísicos difíciles y dudosos Podemos decir que en un sistema deductivo una proposición p es lógicamente previa a otra proposición q si, y sólo si, p es lógicamente más simple que q Ahora tenemos que investigar qué se significa cuando se dice que *p es lógicamente más simple que q* Si podemos suponer p sin suponer q, pero no podemos suponer q sin suponer p, entonces p es lógicamente más simple que q Pero lo que suponemos depende de nuestro punto de partida Por lo tanto, la simplicidad lógica es también una noción relativa En el comienzo de la construcción de un sistema, ciertos conceptos son considerados como indefinidos e inteligibles sin definición Estos conceptos son llamados conceptos primitivos Ciertas proposiciones son consideradas como indemostradas Estas proposiciones reciben el nombre de proposiciones primitivas [18] Tenemos que sustituir la noción vaga de prioridad lógica por la noción de conceptos indefinidos y proposiciones indemostradas Pero no decimos que estos conceptos son *indefinibles* o que estas proposiciones son *indemostrables* Es tan carente de significado preguntar si un concepto dado es indefinible y una proposición dada indemostrable, sin especificar el sistema dentro del cual están siendo usados, como lo sería preguntar si la Tierra se mueve sin especificar el sistema de referencia No debemos cometer el absurdo de definir una proposición primitiva como una proposición lógicamente previa Deseamos *reemplazar* la segunda noción con la primera Al decir que una proposición es primitiva, *significamos* que se la supone y que constituye una base para la demostración aunque no esté demostrada ella misma Está, pues, en la posición de un *axioma* o de un *postulado*, pero no se la ha de considerar *axiomática* en el viejo sentido, es decir, *necesariamente verdadera*

Entonces un concepto primitivo y una proposición primitiva son sólo *primitivos* en relación con un sistema *dado* La selección de estos conceptos y proposiciones primitivos determina un sistema deductivo dado Lo que es un teorema o una proposición demostrada en un sistema, puede ser una proposición primitiva en otro sistema, lo que es definido en un sistema, puede ser indefinido en otro Por lo tanto, carece de significado decir que una proposición primitiva dada es *indispensable* o lógicamente presupuesta por otras proposiciones Esto puede verse con mayor claridad al considerar la relación lógica de la física y las matemáticas Hay un sentido en el que la física presupone a las matemáticas, puesto que la física no puede ser desarrollada sin referencia a las matemáticas, en tanto que las matemáticas sí pueden desarrollarse sin referencia a la física Pero sería erróneo argüir, a partir de esto, que las matemáticas son, *en un sentido incon*

[18] Los términos "concepto primitivo" y "proposición primitiva" se deben a Peano

dicionado, lógicamente previas a, o necesariamente presupuestas por, la física Decir que *p es necesariamente presupuesta por q*, sería decir que *q implica a p*, o sea, que la falsedad de *p* se desprende de la falsedad de *q* Pero éste no es el caso La física no implica a las matemáticas; podría ser falsa aunque las matemáticas no lo fuesen La física podría ser verdadera aun cuando no hubiese leyes generales de las matemáticas [19] De manera similar, las ciencias especiales presuponen los principios de la lógica, pero estos principios no son *implicados* por las ciencias especiales Las proposiciones matemáticas son verificadas inductivamente en la medida en que la física, deducida por medio de estas proposiciones, es verdadera

Podría pensarse que los principios de la lógica constituyen un caso de proposiciones que son necesariamente verdaderas porque están implicadas por todos los sistemas deductivos Pero esto sería un error Se las presupone sólo en el sentido en que las matemáticas son presupuestas por la lógica Argüir a partir de esto hasta llegar a una presuposición incondicional, sería argüir de lo particular a lo general Podría admitirse que los principios lógicos están *supuestos* en toda deducción Pero primero tenemos que suponer proposiciones que afirmen la posibilidad de la deducción. La necesidad de los principios lógicos no es más que la necesidad de construir sistemas La construcción de tales sistemas puede ser la expresión del pensamiento de los seres racionales. Pero no *establecería* la necesidad No nos proponemos controvertir esta necesidad, sino negar que pueda atribuirse significación alguna a la noción de principios *absolutamente* necesarios y proposiciones *absolutamente* indemostrables Se desprende de ello que ningún sistema deductivo puede ser considerado como necesariamente demostrativo de proposiciones verdaderas por medio de proposiciones o axiomas primitivos necesarios Las proposiciones de un sistema deductivo son establecidas como verdaderas sólo por medio de la verificación inductiva Tal verificación nunca es completa; no podría alcanzar a la demostración Ni tampoco aquellas proposiciones que sirven para verificar el sistema inductivamente son más obvias y más evidentes por sí mismas que las proposiciones de las cuales son deducidas Por ejemplo, en el riguroso sistema deductivo desarrollado en los *Principia mathematica*, la proposición $m \times n = n \times m$ requiere más que un volumen para su demostración [20] Pero esta proposición no se hace más *obvia* como resultado de la demostración Ciertamente, podría dudarse de algunos de los axiomas empleados en la

[19] Por supuesto, a menos que algunas leyes generales de las matemáticas hubiesen sido *supuestas*, los científicos no habrían podido construir el sistema conocido como física. Pero el hecho de que las proposiciones físicas puedan ser verificadas (aun suponiendo que esta verificación sea *exacta*) no nos permite *deducir de tales proposiciones* ningunas leyes generales de las matemáticas Podríamos expresar esto diciendo que lo particular no implica lo general

[20] Proposición * 113 27 (*Op cit*, II, p 103)

demostración La demostración, sin embargo, ayuda a verificar los supuestos sobre los cuales se basa la deducción [21]

Si el desarrollo riguroso de un sistema deductivo no conduce al descubrimiento de premisas incontrovertibles por medio de las cuales puedan ser probadas conclusiones; si, por el contrario, se requiere una deducción complicada a fin de demostrar perogrulladas obvias, podría pensarse que tal sistema deductivo tiene muy poca significación Eso, sin embargo, sería un error No es como *método de prueba* que el desarrollo deductivo es importante, sino como *método de análisis* El método de *Principia mathematica* no se utiliza *por la finalidad en sí misma de probar que* $m \times n = n \times m$, sino a fin de analizar la naturaleza de las entidades implicadas, de exhibir sus relaciones de una manera ordenada y de determinar exactamente qué es lo que *puede* ser demostrado El método intenta, pues, descubrir *todos* los axiomas que se emplean y mostrar cuáles de ellos deben ser supuestos como proposiciones primitivas y cuáles pueden ser demostrados a partir de éstos; entonces se deducen *todas* las consecuencias que se desprenden de los axiomas y conceptos iniciales El método parte, pues, de un sistema generalmente aceptado —la aritmética o la geometría, por ejemplo— y procede retroactivamente, analizando las premisas empleadas Entraña así un riguroso análisis de las nociones fundamentales En el curso de este procedimiento analítico se ha descubierto que las matemáticas ordinarias emplean axiomas que pueden ser deducidos, dentro del sistema, a partir de proposiciones lógicamente más simples Ha quedado demostrado también que muchas pruebas en sistemas tradicionales han adolecido de falta de rigor Un ejemplo obvio de esto lo constituye el sistema de Euclides Basta una simple ilustración La primera proposición no puede ser establecida por medio de los axiomas [22] Al construir un triángulo equilátero sobre una base dada, Euclides supone que los dos círculos utilizados se intersectarán Pero su sistema no contiene un axioma explícito a tal efecto, de suerte que la demostración fracasa Es indudable que Euclides se daba por satisfecho debido a que construía *figuras* sobre una superficie plana, lo cual le daba el resultado requerido Pero el empleo de figuras implica que se recurre a la intuición; por lo tanto la deducción no es *lógica* Produce *obviedad*, pero no *de-*

[21] *Cf op cit*, I, *Prefacio*: "En las matemáticas, el mayor grado de autoevidencia no se encuentra por lo común muy al principio, sino en algún punto más adelante; por lo tanto, las primeras deducciones, hasta que llegan a este punto, más bien dan razones para creer las premisas porque de ellas se derivan consecuencias verdaderas, que para creer las consecuencias por que éstas se derivan de las premisas" (p v) *Cf*. más *adelante*, pp 547 48

[22] La primera proposición de Euclides es un *Problema*: Describir un triángulo equilátero sobre una línea recta finita dada El método de construcción es, dada la línea recta AB, describir un círculo con centro A, radio AB; y otro círculo con centro B, radio BA Euclides supone que estos círculos se intersectarán

mostración. Al construir un sistema deductivo, no preguntamos si obtendremos un resultado dado cuando construimos algo *perceptible*, preguntamos si la proposición *se desprende solamente de los axiomas y las definiciones* Si los axiomas son verdaderos, entonces las proposiciones demostradas serán verdaderas Pero lo correcto de la demostración es independiente de la verdad o falsedad de los axiomas Es, ciertamente, *carente de significado* preguntar si los axiomas o las proposiciones primitivas son *verdaderos* Pueden usarse en una forma conducente a resultados que puedan ser *interpretados* de tal manera que los haga verdaderos o falsos Pero, aparte la interpretación, el problema de la verdad no se presenta

Puesto que los axiomas no son dados como verdaderos en el sentido de que se supone que son obtenidos por medio de la *intuición*, es decir, mediante el recurso a la aprehensión inmediata de entidades perceptibles y sus relaciones, la elección de las proposiciones iniciales de un sistema deductivo es ilimitada En la práctica, la selección de los conceptos primitivos y de las proposiciones primitivas está determinada por el punto de partida Como indicamos anteriormente, el punto de partida real no será lógicamente primitivo sino que dependerá de la aceptación de algún sistema generalmente reconocido. El análisis de este sistema conducirá al supuesto de que un conjunto de elementos tienen ciertas propiedades De esta manera se obtendrán los conceptos primitivos Se supondrá que ciertas relaciones rigen entre estos elementos Éstas producirán las proposiciones primitivas Así, en lugar de afirmar "Este elemento A tendrá la propiedad Φ", suponemos la hipótesis "Si el elemento A tiene la propiedad Φ", y así sucesivamente Procediendo en esta forma, probamos que tal o cual conjunto de elementos tienen las propiedades requeridas a fin de demostrar el sistema que nos ocupa, por ejemplo, la geometría euclidiana Diferentes conjuntos de proposiciones primitivas pueden producir resultados que admitan la misma interpretación Pero lo correcto de la demostración es, como hemos visto, independiente de esta interpretación Por lo tanto, nos vemos llevados a considerar los conceptos primitivos como *símbolos* que no son definidos pero sobre los cuales podemos operar por medio de las proposiciones primitivas La falta de una interpretación *determinada* es compensada por la *generalidad* aumentada del sistema El sistema es puramente *formal*, independiente de cualquier cuestión de hecho a la que pueda ser aplicable Tal sistema constituye un esquema deductivo que puede ser aplicado a diversos objetos siempre que sean capaces de verificar los conceptos primitivos y las proposiciones primitivas Puesto que los símbolos no representan objetos determinados sino *cualesquiera objetos que tengan ciertas propiedades formales*, se alcanza el máximo grado de generalidad [28]

[28] *Cf* POINCARÉ, *Science et hypothèse*, p 32: "Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indif

La selección de las proposiciones primitivas no es puramente arbitraria Deben bastar para producir los resultados requeridos y deben ser mutuamente consecuentes Un conjunto de conceptos primitivos y de proposiciones primitivas serán suficientes si es posible definir todos los conceptos y demostrar todas las proposiciones que ocurren en el sistema de términos de estos conceptos iniciales y por medio de estas proposiciones iniciales Para establecer la consecuencia mutua de las proposiciones iniciales, es necesario interpretar los conceptos indefinidos a fin de determinar si las proposiciones primitivas serán verdaderas cuando se las interprete así Tal interpretación produce un teorema de existencia, el cual afirma que hay objetos que tienen las propiedades establecidas en las definiciones [24] Es deseable, además, que las proposiciones primitivas sean *independientes* Una proposición primitiva es independiente cuando no puede ser derivada lógicamente de cualquiera de las otras proposiciones primitivas o de cualquiera combinación de ellas. Para establecer la independencia de las proposiciones primitivas, es necesario seleccionar cada una en turno y mostrar que las restantes proposiciones primitivas pueden ser combinadas con la contradictoria de la proposición seleccionada de manera que produzca un conjunto consecuente Si es posible interpretar los conceptos indefinidos de tal manera que todas excepto una de las proposiciones sean verificadas, entonces esa proposición es independiente del resto Lo ideal es seleccionar el menor número posible de proposiciones primitivas Tal selección satisface una preferencia estética por la elegancia y la sencillez Una distinción clara entre una proposición primitiva y un teorema —o sea, una proposición demostrada por medio de proposiciones primitivas— depende de la completa independencia del conjunto de proposiciones primitivas Es posible que haya diferentes sistemas deductivos en los que las proposiciones primitivas de uno sean teoremas en el otro Las características de cualquier sistema dado estarán completamente determinadas por las propiedades lógicas de las relaciones dadas en las proposiciones primitivas

Es importante comprender el papel que desempeña la *definición* en un sistema deductivo Desde el punto de vista estrictamente lógico, la definición es "la asignación de un nombre breve a un complejo extenso de ideas" [25] Tales definiciones son *nominales*; lo que se de-

férent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse"

[24] *Cf* WHITEHEAD, *The axioms of projective geometry*, p 3: "De acuerdo con la 'ley de la contradicción' lógica, un conjunto de entidades no puede satisfacer axiomas inconsecuentes De tal suerte, el teorema de existencia para un conjunto de axiomas prueba su consecuencia Este es, al parecer, el único método posible de prueba de consecuencia Pero las únicas pruebas rígidas de teoremas de existencia son aquellas que son deducciones de las premisas de la lógica formal De tal suerte, no puede haber ninguna prueba formal de la consecuencia de las propias premisas lógicas"

[25] *Cf* WHITEHEAD, *Ibidem*, pp. 2 3

fine es un *símbolo* Desde este punto de vista, las definiciones son conveniencias simbólicas Pero siempre que surja el problema de la interpretación, la selección de los conceptos que han de ser definidos es de la mayor importancia, puesto que esta selección determinará la naturaleza del sistema [26] Así, pues, como señala el profesor Whitehead, "si abandonamos el punto de vista estrictamente lógico, se ve en seguida que las definiciones —aunque en la forma siguen siendo la mera asignación de nombres— son la parte más importante del asunto" Para hacer la selección más adecuada para producir un sistema deductivo susceptible de interpretaciones importantes, se requiere esa comprensión profunda que llamamos genio matemático.

La completa generalidad de un sistema deductivo se debe al hecho de que las proposiciones primitivas no determinan un conjunto único de objetos Cuando se pueden construir tales sistemas deductivos, es posible desarrollar una parte de varias ciencias abstractas al mismo tiempo De esta manera, el aumento de la generalidad ayuda al desarrollo de la ciencia.[27]

§ 5 *El sistema de proposiciones y clases*

El intento de generalizar la lógica condujo a un desarrollo doble. Por una parte, se hizo un intento para suministrar un cálculo del razonamiento; por la otra, para analizar las relaciones lógicas propias de un sistema deductivo Un cálculo es un *instrumento* para el razonamiento Su propósito consiste en economizar pensamiento por medio de la creación de un método mecánico para obtener resultados, los cuales pueden ser luego *interpretados* en una forma análoga a aquella en que puede interpretarse una ecuación matemática Un cálculo de esa índole puede tener un gran valor Economizar pensamiento no es desperdiciar tiempo Por medio de tal economía pueden hacerse grandes descubrimientos que, de otro modo, estarían fuera del alcance de las mentes finitas.[28] Como cuestión de hecho histórico, los recientes trabajos sobre los fundamentos lógicos de las matemáticas se han derivado del intento de desarrollar un cálculo lógico Este desarrollo se ha producido en esta forma Para obtener un cálcu-

[26] *Cf*, capítulo XXII, p 498 más adelante

[27] Para una discusión más amplia de diferentes conjuntos de proposiciones primitivas, el estudiante puede referirse a: *Transactions of the American Mathematical Society*; E V HUNTINGDON: "Sets of independent postulates for the algebra of logic" (1904), y "A set of postulates for real algebra" (1905).

[28] A cualquiera que ponga en duda el valor de un cálculo se le puede invitar a que conteste la sencilla pregunta: ¿Qué personas no son los descendientes de aquellos que no son mis antepasados? De Morgan mostró por medio de este ejemplo cuán sumamente difícil resulta contestar preguntas muy simples en la lógica de las relaciones sin la ayuda de alguna forma de cálculo

lo debe emplearse un simbolismo bien definido Las ambigüedades del lenguaje ordinario lo hacen inadecuado para este propósito Es necesario utilizar símbolos ideográficos que representen conceptos y las relaciones entre ellos *directamente* A fin de que las conclusiones sean extraídas con la máxima economía de pensamiento, es necesario utilizar reglas de transformación de fórmulas análogas a las que se emplean en el álgebra ordinaria En esta forma, un proceso casi mecánico de cálculo toma el lugar del razonamiento Debido al empleo de reglas exactas de transformación y de símbolos ideográficos cada uno de los cuales esté bien definido, todas las premisas del razonamiento son explícitamente enunciadas De tal suerte, el desarrollo de un cálculo preparó el camino para el análisis de los sistemas deductivos

Los primeros intentos de construir un cálculo lógico se basaron en la analogía del procedimiento matemático ordinario En consecuencia, se subrayaron las analogías matemáticas y se utilizaron símbolos matemáticos para expresar las relaciones Esta analogía ha sido desfortunada en algunos aspectos, pero no hay duda de que ayudó a los primeros intentos de los lógicos por generalizar los procesos de la lógica, debido a la familiaridad de aquéllos con la notación matemática Sin embargo, representó un obstáculo por lo que se refiere al problema del análisis Así Frege, en su indagación de los fundamentos de la aritmética —en la que planteó el problema de si su base es empírica o puramente lógica— se vio llevado a poner un mayor énfasis en las *diferencias* que en las *analogías* entre las matemáticas ordinarias y aquella generalización de la lógica que ahora recibe comúnmente el nombre de *lógica matemática* Un teorema matemático es una proposición, y una prueba matemática es un conjunto de proposiciones relacionadas Investigar las condiciones de tal prueba equivale a analizar las relaciones lógicas a fin de determinar sus propiedades En este análisis es preciso hacer distinciones sutiles que son *prematemáticas*, para usar una conveniente expresión de Johnson Consecuentemente, Frege y Peano, a quienes se debe la iniciación de los trabajos modernos sobre los fundamentos de las matemáticas, utilizaron símbolos ideográficos de una forma diferente de la de aquellos que se utilizan en el álgebra ordinaria [29] De este modo, subrayaron más bien el aspecto del análisis lógico que el del cálculo

Consideraremos el cálculo sólo en la medida en que arroje luz sobre el proceso de la generalización de la lógica Como dice Russell: "La lógica simbólica, considerada como un cálculo, tiene indudablemente mucho interés por sí misma; pero, en nuestra opinión, este aspecto ha recibido hasta ahora demasiado énfasis a expensas del aspecto en el que la lógica simbólica es meramente la parte más elemental de las matemáticas y el prerrequisito lógico de todo lo demás" [30]

[29] Para un examen más amplio de Frege y Peano, véase capítulo XXV, § 2
[30] *Principia mathematica*, p 115

Existen analogías obvias entre el sistema de proposiciones y el sistema de clases La relación más fundamental entre las proposiciones es la *implicación*, la relación más fundamental entre las clases es la *inclusión* Las propiedades lógicas de estas dos relaciones son las mismas Por lo tanto, la *equivalencia lógica* de las proposiciones y la *igualdad* de las clases tienen las mismas propiedades formales De aquí que, hasta cierto punto, un sistema construido con elementos relacionados por una relación indefinida que tenga estas propiedades pudiera ser interpretado lo mismo como un sistema de proposiciones que como un sistema de clases Pero hay aspectos importantes en los que se rompe el paralelismo. Así, como observa Russell: "La afinidad simbólica de la lógica proposicional y la lógica de clase es una especie de trampa, y tenemos que decidir a cuál de las dos vamos a hacer fundamental" [81] No puede haber duda de que el sistema proposicional es más fundamental Esto se advierte cuando se considera la distinción entre una *operación* y una *relación* Una operación es un proceso ejecutado sobre algo y que produce cierto resultado Así, si se le añade 3 a 6, la operación de la *adición* es ejecutada y rinde el resultado 9 Este resultado es también un número Podría reemplazar a 3 o a 6 en cualquier función proposicional acerca de *todos* los números Esto podría expresarse al decir que el *resultado de una operación* puede ser sustituido significativamente en cualquier fórmula en que ocurran los elementos de la operación Así, pues, los símbolos matemáticos +, —, ×, simbolizan operaciones Al aprender las tablas de multiplicación, o al aprender a sumar nuestras cuentas, estamos aprendiendo cómo ejecutar operaciones Una relación es muy distinta de una operación La conexión de dos elementos por una relación no produce un resultado del mismo tipo que los elementos relacionados Por ejemplo, la relación entre clases produce una *proposición*, no una clase Un sistema deductivo es generado por *relaciones* lógicas, no por operaciones.

A pesar del hecho de que el sistema de proposiciones es más fundamental, consideraremos en primer lugar el sistema de clases La razón de este procedimiento se encuentra en el desarrollo histórico de la lógica generalizada a partir del cálculo El cálculo fue elaborado primero para las clases y después fue *interpretado* para podérselo aplicar a las proposiciones Ciertas peculiaridades en la forma en que los sistemas deductivos han sido desarrollados son más fácilmente aprehensibles para el estudiante si se las aborda a través del sistema de clases La extensión de una clase es una idea familiar, de modo que la interpretación extensional de las clases no ofrece mayores dificultades Pero la interpretación extensional de las proposiciones no es fácilmente aprehensible para el principiante Por esta razón adoptamos un método de tratamiento que no es del todo satisfactorio desde el punto de vista lógico

En el sistema de clases comenzamos con un concepto no analizado

[81] *Principles of mathematics*, p 12

de una clase, o sea, de un conjunto de individuos llamados *miembros de* la clase Hacemos los siguientes supuestos:

(1) Hay una clase de todos los individuos posibles, llamada el "universo" El *universo* será simbolizado por |

(2) Hay una operación de selección de individuos que produce el resultado de una clase de la cual todos los individuos son miembros

(3) Cualquier clase puede ser seleccionada a partir de |

(4) Las clases pueden ser combinadas

(5) Cualquier combinación de clases es una clase.

En este punto hacemos una pausa para indagar lo que ya sabemos por lo que toca a los modos en que pueden ser combinadas las clases Debe observarse que estos modos de combinación son las operaciones que ejecutamos sobre las clases De aquí el supuesto (5) En nuestros supuestos, hemos supuesto un solo modo de combinación, a saber, la operación de *seleccionar* clases Esto no bastaría para la construcción de un sistema Pero hay un número infinito de modos de combinación que sí bastarían ¿Cómo, pues, vamos a elegir los modos que hemos de suponer? La respuesta, en la práctica, es que escogemos aquellos modos que produzcan sistemas susceptibles de ser interpretados de suerte que sean aplicables al mundo real Indudablemente, esto es un accidente del empeño del lógico, como pensador, para adquirir un conocimiento del mundo real El hecho de que es posible construir sistemas que no tienen ninguna interpretación real, muestra que, desde el punto de vista lógico, todo lo que tiene que ser considerado son las formas y las relaciones lógicas, haya o no haya de ser interpretado el sistema Pero Euclides no hubiese construido su sistema geométrico si no hubiese empezado con intuiciones espaciales Así como el lógico parte de un conocimiento de los modos de combinación que son capaces de producir resultados interpretables, del mismo modo el estudiante comprenderá mejor cómo puede construirse un sistema mediante la consideración, en primer término, de las operaciones que ya son familiares

Comenzaremos, pues, con algunos ejemplos familiares de selección y combinación de clases Del universo de individuos posibles seleccionamos todos aquellos que son *políticos* De la clase de los *políticos* seleccionamos aquellos que son *hidalgos* La clase resultante de estas dos operaciones sucesivas es la clase de los *políticos hidalgos*, es decir, la clase de todos aquellos que son *tanto políticos como hidalgos*

Seleccionamos del universo todos aquellos que son *políticos*; seleccionamos también aquellos que son *poetas* Combinamos la clase de los *políticos* con la clase de los *poetas* La clase resultante es la clase de todos aquellos que *o bien son políticos o bien son poetas*.